



MATEMÁTICAS II COMPETENCIAIS

PARA O DÍA A DÍA NA AULA



Iván Area
Concepción Aramburu
Mercedes Besada
Tomás Cotos
Carlos Ferreiro
Benjamín Macía
Ángel M. Rey



ISBN: 978-84-09-69457-0

Depósito legal: OU 30-2025

Título: Matemáticas II competencias para o día a día na aula

Autoras e autores: Iván Area Carracedo, Concepción Aramburu Sánchez, María Mercedes Besada Hermida, Tomás R. Cotos Yáñez, Carlos Ferreiro García, Benjamín Macía Fernández, Ángel Manuel Rey Roca

Colaboradoras e colaboradores: Carles Monereo i Font, Sofía Rama Lorenzo, Laura María Fernández Pardo, Jesús Pérez Seoane, Ana Isabel García Arias, Teresa Táboas Veleiro, Santiago Lago-Peñas, Xavier Simón Fernández, Óscar García García, Laura Carballo Piñeiro, María Cristina Trillo Yáñez e Félix Quintero Martínez, Luis Costa Vázquez e Nieves Lorenzo González

Breve descripción do contido: Logo da publicación do [Real decreto 534/2024](#), do 11 de xuño, xorde a necesidade de dispor de materiais con enfoque competencial. Aínda que esta necesidade xa existía desde o ano 2020, derivada da posta en vigor da LOMLOE, a urxencia comezou a ser maior cando os modelos de exames da proba de acceso á universidade (PAU) inseriron unha pregunta de carácter competencial e obrigatoria para todo o alumnado. Se ben é certo que os modelos da [Comisión Interuniversitaria de Galicia \(CiUG\)](#) deixan claro o bloque sobre o que versará a pregunta competencial no ano 2025, as autoras e autores deste traballo consideraron acaído comezar a preparar modelos completos para a materia Matemáticas II, seguindo o currículo establecido no [Decreto 157/2022](#), do 15 de setembro. Máis aínda, esperamos que esta iniciativa sexa de interese non só para o profesorado de segundo de bacharelato da devandita materia, senón que comecen a agromar textos semellantes para o resto das materias das que o alumnado galego pode examinarse na PAU, e por suposto, para outros niveis educativos.

Iván Area, Concepción Aramburu, Mercedes Besada, Tomás Cotos, Carlos Ferreiro, Benjamín Macía e Ángel M. Rey. Matemáticas II competencias para o día a día na aula. [EDUGA \(Revista Galega do Ensino\)](#), decembro de 2024.

Iván Area Carracedo, Universidade de Vigo, catedrático de Universidade de Matemática Aplicada adscrito á Escola de Enxeñaría Aeronáutica e do Espazo, campus de Ourense. area@uvigo.gal

Concepción Aramburu Sánchez, inspectora de Educación na sede territorial da Coruña. conchita.aramburu@edu.xunta.gal

María Mercedes Besada Hermida, profesora de Matemáticas adscrita ao IES Valle Inclán (Pontevedra). mbesada@edu.xunta.gal

Tomás R. Cotos Yáñez, Universidade de Vigo, profesor contratado doutor de Estatística e Investigación Operativa adscrito á Escola Superior de Enxeñaría Informática, campus de Ourense. cotos@uvigo.gal

Carlos Ferreiro García, profesor de Matemáticas adscrito ao IES As Lagoas (Ourense). ferreirogarcia@edu.xunta.gal

Benjamín Macía Fernández, catedrático de Matemáticas xubilado. bmacia@edu.xunta.gal

Ángel Manuel Rey Roca, profesor de Matemáticas adscrito ao IES Francisco Asorey de Cambados (Pontevedra). angelmrey@edu.xunta.gal

ISBN: 978-84-09-69457-0

Depósito legal: OU 30–2025

Índice

Prólogo de Carles Monereo	vii
Proemio	x
Marco teórico	1
<i>Influencers</i>	13
1.1 Análise das dimensións do carácter competencial da situación de aprendizaxe <i>Influencers</i>	32
1.2 Análise dos criterios, obxectivos, descritores operativos e contidos das tarefas 1.1–1.4 da situación de aprendizaxe <i>Influencers</i>	38
1.2.1 Obxectivos da materia Matemáticas II	38
1.2.2 Criterios de avaliación	39
1.2.3 Descritores operativos ao completar o bacharelato	40
1.2.4 Análise das tarefas 1.1.–1.4.	41
Agricultura ecolóxica	47
Vivenda	74
Taxas turísticas	101
Parques eólicos	122
Tempos de estudo e de lecer	144
Cambio climático	162

Pesca	183
Láser	213
Concerto de Taylor Swift	231
Unha obra na túa rúa	257

Prólogo

«Dime como avalías e direiche como aprende o teu alumnado.»

A investigación foi teimuda en repetir que a avaliación ten evidentes e potentes efectos retroactivos sobre a aprendizaxe e o ensino (Stobart, 2010); dito doutro xeito, o estudiantado tende a estudar e a aprender un contido de maneira axustada ao tipo de demanda que percibe que o/a docente lle fará. Por conseguinte, se cre que o seu profesor ou profesora lle solicitará que aplique un conxunto de fórmulas matemáticas, pouco contextualizadas, tratará de memorizar esas fórmulas á marxe da problemática á que poidan referirse e ás consecuencias que uns determinados resultados puidesen ter na toma de decisións persoais ou dalgún colectivo (daralle o mesmo que se trate de desperdicios que afecten o quecemento global ou do número de suicidios de adolescentes debidos a situacións de acoso).

Así mesmo, esa docente terá como marco de referencia a súa proba ou exame e, se esa proba carga o peso na aplicación de fórmulas matemáticas, na clase insistirá en como memorizalas e aplicalas a calquera tipo de datos numéricos, con independencia de a que contidos ou circunstancias se refiran eses datos.

Pola contra, se nesas probas se prima especialmente a interpretación duns resultados nun contexto determinado e se solicita a argumentación dunha toma de posición ou dunha decisión, relativa a como podería ou debería actuarse en distintos ámbitos —persoal, local, planetario—, é máis probable que o estudante oriente o seu estudo e aprendizaxe non só á obtención duns resultados numéricos, senón tamén ao sentido deses datos nunha situación social, económica e/ou política específicas. De igual modo, o profesorado tenderá a incluír ese talante reflexivo nas súas clases se quere que o seu alumnado estea preparado para afrontar este tipo de probas.

É desde esta segunda perspectiva desde a que esta obra se formula a avaliación da materia de Matemáticas (II), correspondente ao bacharelato, e que pode ter tamén incidencia na PAU (proba de acceso á universidade).

Trátase dunha proposta pioneira no noso país, consistente en reconverter as típicas probas baseadas en exercicios descontextualizados en probas fundamentadas en situacións-problema, directamente extraídas de acontecementos ou fenómenos reais, claramente presentes na vida dos cidadáns, que tamén adoitan adxectivarse como «auténticas» (Monereo, 2009), no sentido de xenuínas e verosímiles.

É por iso que, nesta publicación, se analiza o impacto social e económico dos e das *influencers*, da agricultura ecolóxica, da vivenda, das taxas turísticas, dos parques eólicos, do tempo de estudo do alumnado ou do cambio climático, entre outras. Temáticas todas elas de plena actualidade e absolutamente vinculadas aos intereses e preocupacións da mocidade do século XXI.

É, pois, unha acción decidida para avaliar e ensinar con sentido, en liña co enfoque de avaliación e ensino por competencias que domina os currículos educativos dos países máis avanzados de todo o mundo e que tamén ocupan un lugar central no actual currículo español (a LOMLOE).

Aínda que as distintas comunidades autónomas, responsables últimas da elaboración das probas PAU, se mostran aínda moi tímidas e precavidas á hora de apostar pola presentación de situacións de carácter competencial e están a optar pola súa progresiva introdución, nos próximos anos, consideramos que esa tendencia será imparable e que, grazas a materiais vangardistas coma este, esa transición pode facilitarse enormemente.

Non podemos nin queremos obviar que ese cambio será cuestionado por unha parte da comunidade educativa —familias, profesorado, alumnado—, ancorada nunha cultura avaliativa supostamente «obxectiva» (tipo test), que proclamará que, con este tipo de probas, se adelgazan contidos e se rebaixan esixencias (Pozo e Monereo, 2009). Nada máis lonxe da realidade. Como mostrou o estudo realizado por Aramburu (2023), para a maior parte do estudantado, afeito á memorización asociativa de información, este tipo de probas resultan máis complexas ca as clásicas, aínda que tamén máis estimulantes e desafiantes, e moito máis rendibles en termos de aprendizaxe. Velaquí dous comentarios de estudantes que nos parecen especialmente significativos:

«A (proba) competencial busca crear unha aplicación para os problemas, pero require máis esforzo e coñecementos doutras materias, mentres que a clásica só avalía coñecementos de Matemáticas, pero pode resultar aburrida ou pouco útil.»

«A (proba) competencial ten como vantaxe que lle atopas un sentido ás cousas e te fai pensar máis, pero perdes moito tempo en ler e entender os enunciados. A (proba) clásica ten como vantaxe a súa sinxeleza á hora de expor os problemas, pero tes a sensación de que o que fas carece de importancia.»

Pensar e utilidade vs. sinxeleza e inutilidade.

Ademais dos efectos retroactivos que sinalabamos ao principio, esperamos que propostas como esta tamén produzan un efecto *forward*, é dicir, cara adiante, afectando ao último curso de bacharelato e aos primeiros cursos universitarios. Ata ese momento, a mensaxe que enviaban moitos profesores de bacharelato, mesmo aqueles que trataban de innovar, era que durante os últimos meses do curso debían deterse e dedicarse a «chapar» os contidos que con máis probabilidade aparecerían nas probas de selectividade. Esta formulación disruptiva rompe coa introdución de probas competenciales desde o primeiro momento, sen que exista a necesidade de preparar o estudantado especificamente para unha proba (Palacios e López-Pastor, 2011).

Por outra banda, como enunciabamos, tamén pode supoñer unha influencia positiva para que os docentes universitarios de primeiros cursos de cada licenciatura repensen a súa aproximación ao estudantado. Sirva como exemplo esta anécdota real: hai algúns anos, cando algúns institutos innovadores empezaron a traballar con métodos de aprendizaxe cooperativa, realizando en clase traballos en grupo e preparando o alumnado para un mundo no que se traballa maioritariamente en equipo, algúns profesores universitarios queixábanse de que, en canto se descoidaban, os alumnos se organizaban en grupos durante as tarefas de clase. Afortunadamente na actualidade, en moitas materias universitarias, o traballo en grupos está á orde do día.

Esperemos que publicacións como esta sirvan tamén para dinamizar as propostas metodolóxicas non só en bacharelato, senón antes e despois, en secundaria e na universidade. Máxime cando o contido curricular aquí tratado son as famosas e temidas matemáticas, un dominio considerado tradicionalmente difícil, abstracto e afastado da cotiandade das nosas vidas.

Con este texto, obra de grandes especialistas na materia, acábase coas escusas. Aquí hai excelentes exemplos de como partir de situacións auténticas para avaliar e aprender matemáticas de forma competencial.

Bibliografía

- Aramburu, C. (2023). *Informe sobre actuación experimental de aplicación de pruebas competenciales*. Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades. Xunta de Galicia.
- Monereo, C. (2009). La autenticidad de la evaluación. En Castelló, M. (2009). *La evaluación auténtica en Enseñanza Secundaria y universitaria: investigación e innovación*

(pp. 15-28). Barcelona: Editorial Edebé.

Palacios, A. e López-Pastor, V. M. (2011). Haz lo que yo digo, pero no lo que yo hago: sistemas de evaluación del alumnado en la formación inicial del profesorado. *Revista de Educación*, 361, pp. 279-305.

Pozo, J. I. e Monereo, C. (2009). La nueva cultura del aprendizaje universitario o por qué cambiar nuestras formas de enseñar y aprender. En Pozo, J. I. e Pérez Echevarría, M. P. *Psicología del aprendizaje universitario. La formación en competencias* (pp. 9-28). Madrid: Morata.

Stobart, G. (2010). *Tiempos de pruebas: los usos y abusos de la evaluación*. Madrid: Morata.

Texto de **Carles Monereo Font**, Catedrático en Psicología da Educación na [Universitat Autònoma de Barcelona](#).

Proemio

O obxecto desta obra é fornecer o profesorado e o alumnado de distintos materiais competenciais para a materia Matemáticas II de segundo de bacharelato, de xeito que se poidan desenvolver durante todo o curso académico. Consideramos que existen xa moitas e moi boas publicacións para as partes teóricas e prácticas desta materia que poderíamos clasificar como clásicos. Porén, non temos constancia dunha obra publicada como a que presentamos nin de Matemáticas II nin de ningunha outra materia, no ámbito galego ou do resto do estado. Sabemos que neste intre tamén se está a traballar nun libro semellante para a materia de Lingua Galega e Literatura II, fundamentado na avaliación competencial. Durante a elaboración deste libro tivemos distintas reunións para coordinar algunhas partes das dúas obras.

Desde o punto de vista normativo, debemos referirnos á [Lei orgánica 3/2020 \(LOMLOE\)](#), do 29 de decembro, pola que se modifica a [Lei orgánica 2/2006](#), do 3 de maio, de educación, (LOE) que introduce un cambio profundo no referente á avaliación, ao introducir a denominada avaliación competencial. *Stricto sensu* a avaliación competencial aparece formalmente xa na LOE, permanece na [Lei orgánica 8/2013](#), do 9 de decembro, para a mellora da calidade educativa (LOMCE), e continúa na actual LOMLOE. A devandita lei educativa introduce por primeira vez un currículo competencial no sentido de que os criterios de avaliación deixan de avaliar directamente contidos para avaliar competencias específicas. O nivel de esixencia é superior, xa que non so é necesario saber o contido e procedementos, senón que o alumnado ten que ser capaz de usar todo ese contido para resolver situacións reais que só poden ser resoltas desde o dominio da materia. No ámbito normativo tamén temos que referirnos ao [Real decreto 243/2022](#), do 5 de abril, polo que se establecen a organización e as ensinanzas mínimas do bacharelato (BOE núm. 82, do 6 de abril) e no ámbito galego, o currículo vén definido polo [Decreto 157/2022](#), do 15 de setembro, polo que se establecen a ordenación e o currículo do bacharelato na Comunidade Autónoma de Galicia (DOG núm. 183, do 26 de setembro).

Nesta obra presentamos distintas situacións de aprendizaxe sobre as que formulamos tarefas. Na análise do carácter competencial de cada situación de aprendizaxe tivemos presente a guía GAPPISA¹ de Carles Monereo, así como a súa [páxina web](#) e unha comunicación privada², [logo de participarmos nun curso sobre avaliación competencial](#)

¹Guía GAPPISA: Carles Monereo (coord.) (2009) Pisa como excusa. Repensar la evaluación para cambiar la enseñanza. Barcelona: Graó.

²Monereo, C. (2024). Guía para la elaboración de pruebas de acceso. Manuscrito en preparación. Barcelona: Departamento de Psicología de la educación, Universitat Autònoma de Barcelona.

organizado pola Consellaría de Educación, Ciencia, Universidades e Formación Profesional. Nestes traballos sinálanse unha serie de dimensións que a e o docente debe comprobar para saber se a proba ou o material proposto *é competencial*, *sobre os que fixemos unha serie de adaptacións ao estaren orientados a probas específicas*. Na nosa proposta estas dimensións deben facernos reflexionar sobre se a situación-problema inicial está contextualizada, se as tarefas e actividades son auténticas e vinculadas co currículo, se as tarefas e actividades son mobilizadoras ou se fomentan actitudes, se temos tarefas ou actividades de diferentes complexidades cognitivas (taxonomía de Bloom), se o formato dos enunciados e das respostas é heteroxéneo, as condicións para a realización das tarefas, a promoción do razoamento, capacidade de pensar e abstracción, a avaliación do proceso, compartir puntuacións e criterios ou a atención á diversidade. Debemos ter presente que é moi difícil que unha situación de aprendizaxe cumpra todas as dimensións, pero o feito de pensar nelas é un exercicio interesante para buscar puntos de mellora. É certo que no momento de escribir este libro os exames da PAU, segundo acordo de [CRUE](#), só conterán un exercicio de tipo competencial de carácter obrigatorio que suporá entre o 20 % e o 25 % da cualificación final. Pero tamén é certo que o esperado é ir incrementando esta porcentaxe de xeito gradual, se ben este libro non é unha obra pensada na preparación da PAU senón na necesaria avaliación por competencias da materia Matemáticas II en segundo de bacharelato. A nosa finalidade é fornecer de material cun deseño competencial para o traballo diario na aula, de xeito que alumnado e profesorado poidan familiarizarse con este tipo de formulacións e avaliación. Para a resolución das tarefas recoméndase dotar o alumnado dos instrumentos necesarios como cadros de fórmulas que poidan aplicar de xeito autónomo, maximizando saberes e minimizando contidos conceptuais.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, queremos analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato de Galicia para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Consideramos que os pesos asignados a cada competencia poderían empregarse no caso de usar a situación de aprendizaxe para avaliación. Ademais, analizamos a referida variación da guía GAPPISA de Carles Monereo tamén para a primeira situación de aprendizaxe. Ao final do marco teórico as persoas interesadas poden ver como anexo as preguntas sobre as dimensións e os correspondentes indicadores de calidade que poden ser empregadas para calquera outra situación de aprendizaxe. O cambio vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ao abordar un libro docente de calquera materia unha cuestión que xorde de xeito natural é a relacionada coa orde coa que presentaremos os materiais. No noso caso empregaremos a experiencia acumulada con distintas responsabilidades no ámbito educativo. En calquera caso, calquera docente ou estudante poderá analizar na orde que prefira as distintas tarefas das situacións de aprendizaxe que formulamos. Cómpre sinalar que non se trata de termos manuais teóricos para cuestións de contidos conceptuais por unha banda e pola outra un manual de situacións de aprendizaxe, senón de ter situacións de aprendizaxe que deberían acabar por substituír as unidades didácticas. En cada unha das situacións de aprendizaxe formulamos sempre catro tarefas, e posteriormente unha serie de tarefas extra que poden ser semellantes ás formuladas ou ben ter máis de complexidade segundo a citada taxonomía de Bloom. Nese segundo caso as tarefas están orientadas ao enriquecemento curricular. A primeira destas ten un carácter completamente transversal que é preparar un texto relacionado co que se aprendeu. A proposta é a de realizar as distintas tarefas dunha ou de varias situacións de aprendizaxe durante o curso académico, xa que pola propia estrutura da materia non é posíbel facelo de xeito continuado antes de rematar o curso. É por iso que cando se analiza a parte correspondente á avaliación o que se formula é unha cualificación de 10 puntos á situación completa, para que despois poida ser ponderada de acordo coa porcentaxe que estime a ou o docente co resto de actividades de avaliación. Neses 10 puntos reservamos 1 punto para unha serie de competencias transversais, de xeito que a suma das puntuacións reflectidas nas catro tarefas é de 9 puntos. Só facemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe e nas outras pode reformularse *mutatis mutandis*.

Algunhas das imaxes que empregamos foron tomadas de <https://www.freepik.com>, outras son da autoría das persoas autoras do libro. Tamén solicitamos permisos aos autores das viñetas que acompañan como estímulos gráficos as distintas situacións de aprendizaxe. O noso agradecemento a Xosé Lois González Vázquez, “o Carrabouxo”, Luís Davila Malvido, “o Bichero”, e a Pablo Prado, “Fuco”.

Posto que os temas que se abordan teñen moita repercusión no día a día alén dos problemas que se formulan desde as matemáticas, en cada unha das situacións de aprendizaxe propostas comezamos cun texto de estímulo escrito *ad hoc* por distintos especialistas. Queremos agradecerlles a Jesús Pérez Seoane, Ana Isabel García Arias, Teresa Táboas Veleiro, Santiago Lago-Peñas, Xavier Simón Fernández, Óscar García García, Laura Carballo Piñeiro, María Cristina Trillo Yáñez e Félix Quintero Martínez, Luis Costa Vázquez, e Nieves Lorenzo González as súas desinteresadas achegas que pensamos enriquecen dun xeito excepcional este libro.

Non podemos deixar de mencionar un grupo de compañeiras/os que de xeito desinteresado revisaron as nosas contas e explicacións para tentar reducir o número de erratas que poida ter a publicación. Outro grupo de persoas axudou, tamén de xeito desinteresado, coa revisión lingüística. Todas aquelas erratas matemáticas ou lingüísticas que aínda queden son completa responsabilidade nosa.

Finalmente, queremos expresarlle o noso agradecemento á [Revista Galega do Ensino](#) por permitirnos publicar en distintos artigos as nosas achegas, que esperamos que sexan de utilidade para a comunidade educativa, non só para profesorado e alumnado de Matemáticas II. No número de decembro de 2024 publicamos integramente a primeira de sete situacións de aprendizaxe, con ligazón para as outras seis. No seguinte número, en xuño de 2025, verán a luz as outras catro situacións de aprendizaxe que completan este traballo. O noso agradecemento tamén á [Asociación Socio-Pedagóxica Galega \(AS-PG\)](#) pola publicación do texto íntegro do libro en formato dixital.

Marco teórico

Moito máis ca un cambio de notación

Aínda que a tendencia habitual nos cambios educativos é interpretalos como simples cambios de notación para seguir facendo o mesmo, consideramos que no caso da LOMLOE hai que destacar dous aspectos que van moito máis alá. Por unha banda, salientamos o papel que se lle outorga á **educación inclusiva**. Sendo agora un principio central, implica implicitamente un axuste ao deseño universal para a aprendizaxe das medidas organizativas, metodolóxicas e curriculares. Ademais, o currículo debe centrarse no desenvolvemento das **competencias clave**, sobre as que xirará este marco teórico.

Imaxe de fondo obtida de <https://www.freepik.com>

O marco teórico que presentamos está baseado nunha recente charla nas II Xornadas de Actualización en Lingua Galega e Literatura no ensino³, así como no texto da mesma autora⁴.

Competencias para o ensino e a aprendizaxe

Debemos ter presentes en todo momento os tres elementos fundamentais sobre os que se articula o currículo competencial, a saber:

1. Obxectivos da materia,
2. Descritores operativos,
3. Criterios de avaliación.

Aínda que este libro está orientado á Comunidade Autónoma de Galicia, consideramos importante sinalar que nos decretos curriculares galegos as «**competencias específicas**» se denominan «**obxectivos da materia**». Sexa cal sexa o seu nome (para as persoas lectoras do campo das matemáticas poderíamos citar a Hilbert coas súas mesas, cadeiras e xerras de cervexa), as competencias específicas son aquelas coas que cada materia contribúe ao desenvolvemento das competencias clave. Estas **competencias clave** concrétanse nos descritores operativos do perfil de saída de cada etapa educativa, cara ao cal o profesorado debe orientar o seu traballo, co obxectivo de que o alumnado alcance o devandito perfil. Os **criterios de avaliación** encárganse de valorar o nivel de desenvolvemento competencial do alumnado en relación con ese perfil, a través das actividades, tarefas ou situacións de aprendizaxe que o profesorado utilice no proceso de ensino-aprendizaxe. O mesmo sucede cos saberes básicos, que no currículo galego se chaman **contidos** e deben abordarse de forma competencial, sempre subordinados ao saber facer, é dicir, á súa aplicabilidade práctica.

Aínda que xa nos referimos ao marco normativo no ámbito autonómico, hai que ter en conta que estamos ante un mandato de rango moi superior, que no ámbito universitario comezou en 2010 co cambio ao Espazo Europeo de Educación Superior. Segundo o **Consello de Europa**, as competencias son unha combinación de coñecementos, habilidades e

³Sofía Rama, Secuencias didácticas para traballarmos a lingua galega na aula, Universidade da Coruña, 15 de outubro de 2024.

⁴Sofía Rama (2024). Necesidade dun cambio metodolóxico na materia de Lingua Galega e Literatura en relación co proceso de normalización nas aulas de secundaria. En María Álvarez de la Granja, Elisa Fernández Rei e Nel Vidal Barral (coordinadores), *Recursos e novas metodoloxías para as aulas de Lingua Galega e Literatura*. Consello da Cultura Galega, 2024.

actitudes que todas as persoas necesitan para a súa realización e desenvolvemento persoal, a súa integración social e o exercicio dunha cidadanía activa. Estas habilidades adquiúrense cunha perspectiva de aprendizaxe ao longo da vida (*lifelong learning*), desde a infancia ata a idade adulta, e desenvólvense a través da aprendizaxe formal, non formal e informal, en diversos contextos. En definitiva, as competencias xa non son simplemente «básicas» senón que se converten en «clave», posto que son o eixe central do proceso de aprendizaxe. En palabras de [Javier Valle](#), formuladas como ecuación

$$\text{saber conceptos} + \text{saber facer} + \text{saber estar} = \text{saber ser}.$$

Son accións que combinan coñecementos, saber facer e saber estar, o que implica a capacidade de aplicar o aprendido en situacións reais.

Neste contexto, o profesorado ten que ensinar a desenvolver e avaliar competencias, o que supón «cuestionar» prácticas transmisivas tradicionais afastadas da realidade, con actividades repetitivas, memorísticas e procesos de avaliación finalista, para construír outras prácticas máis acordes coas novas necesidades educativas. O profesorado tamén debe desenvolver as súas capacidades docentes para conseguir este cambio metodolóxico. De novo, para as lectoras e lectores do campo das matemáticas, podemos lembrar máis dunha antoloxía de exercicios repetitivos, moi habitual no século pasado.

Situacións de aprendizaxe

Segundo o [Real decreto 217/2022](#), do 29 de marzo (BOE núm. 76, do 30 de marzo) as situacións de aprendizaxe (SA) son situacións e actividades que supoñen o despregamento por parte do alumnado de accións asociadas a competencias clave e competencias específicas e que contribúen á súa adquisición e desenvolvemento. É dicir, atopámonos ante unha ferramenta eficaz para integrar os elementos curriculares das distintas áreas mediante actividades e tarefas significativas e relevantes dirixidas á resolución creativa e cooperativa de problemas. Estas situacións favorecen a autoestima, a autonomía, a reflexión e a responsabilidade do alumnado. A diferenza das unidades didácticas tradicionais, que se centraban en contidos illados, a situación de aprendizaxe céntrase no desenvolvemento de habilidades e competencias, promovendo unha aprendizaxe construtivista e autónoma. Isto implica que cada alumno ou alumna constrúe o seu propio coñecemento transformando a información recibida. En consecuencia, o papel da/do docente tamén cambia, pasando de ser transmisor de coñecementos a desempeñar o papel de guía, mediador e promotor de valores.

As situacións de aprendizaxe parten dun reto inicial e culminan coa creación dun produto final que responda a devandito reto, aínda que a solución non é única. Neste proceso, séguese o ciclo de aprendizaxe baseado na experiencia, coñecido como «Ciclo de Kolb». Segundo este modelo, a aprendizaxe implica activar catro capacidades diferentes:

- **Experiencia concreta:** vivir novas experiencias sen prexuízos, explorando e experimentando.
- **Observación reflexiva:** reflexionar sobre experiencias desde diferentes perspectivas, estruturándoas.
- **Conceptualización abstracta:** crear novos conceptos e integrar observacións en teorías sólidas, analizando e entendendo.
- **Experimentación activa:** aplicar estas teorías para tomar decisións e resolver problemas, producindo e creando.

Deste xeito, as situacións de aprendizaxe favorecen unha aprendizaxe dinámica, na que o alumnado desenvolve habilidades para afrontar con eficacia situacións reais.

Ao deseñar situacións de aprendizaxe, o profesorado debe ter en conta as seguintes características:

- **Competencias:** o profesorado debe planificar e deseñar situacións de aprendizaxe que lle permitan ao alumnado desenvolver habilidades e competencias clave, orientando a aprendizaxe cara á súa aplicación práctica.
- **Enfoque holístico:** o sistema educativo debe integrar áreas e materias para ofrecer unha comprensión global da realidade, xa que non está dividida en compartimentos estancos. As situacións de aprendizaxe deben conectar elementos curriculares de distintas disciplinas, xa que o estudo illado das partes non explica o funcionamento do conxunto.
- **Inclusión:** a inclusión está garantida a través do deseño universal para a aprendizaxe, un modelo que reconece a diversidade do alumnado e que busca eliminar barreiras físicas, sensoriais, cognitivas ou culturais. Isto implica ofrecer diferentes medios para acceder á información, formas variadas de expresión e estratexias que motiven a todo o alumnado, fomentando así a equidade.
- **Contextualización:** é fundamental conectar a aprendizaxe coa realidade, utilizando, por exemplo, os [Obxectivos de Desenvolvemento Sustentábel](#) da [UNESCO](#) como referencia. Isto facilita que o que se aprende na aula teña un valor práctico fóra dela, axudando ao alumnado a comprender a súa contorna.

- **Aprendizaxe significativa:** a aprendizaxe constrúese sobre coñecementos previos relevantes, que se transforman coa incorporación de novos contidos. Este proceso implica unha reconstrución do contido conceptual e unha reorganización dos esquemas mentais para dar resposta a novos retos, o que require a cooperación entre iguais e co profesorado.
- **Flexibilidade:** o profesorado debe empregar unha variedade de ferramentas e enfoques no proceso de ensino e aprendizaxe dentro das situacións de aprendizaxe, como actividades, tarefas, proxectos e secuencias didácticas, adaptándose ás necesidades do alumnado e ao contexto.
- **Motivación:** un factor fundamental é espertar a curiosidade do alumnado, xerando neles o desexo de aprender. A aprendizaxe só se produce cando hai interese, polo que é fundamental ofrecer estímulos iniciais a partir de experiencias concretas, que teñan en conta o contexto, a afectividade e as emocións.

Finalmente, o profesorado debe diferenciar e utilizar adecuadamente ferramentas de ensino e aprendizaxe como secuencias didácticas, tarefas e actividades, utilizándoas nas etapas correspondentes do ciclo de aprendizaxe para optimizar o proceso educativo.

Secuencias didácticas

A secuencia didáctica foi orixinalmente o termo empregado para referirse á organización de exercicios e actividades nas unidades didácticas. Na actualidade, a secuencia didáctica utilízase como ferramenta para realizar a transposición didáctica, é dicir, a adaptación do currículo aos procesos de ensino da profesora ou profesor e aos procesos de aprendizaxe do alumnado. A secuencia didáctica representa o desenvolvemento práctico dunha situación de aprendizaxe mediante a secuenciación de tarefas e actividades. Desde un enfoque comunicativo, unha secuencia didáctica é un conxunto de tarefas deseñadas arredor dun xénero textual (oral, escrito, audiovisual, signado ou multimodal) co obxectivo de que o alumnado comprenda e aprenda a producir ese tipo de texto para o seu uso en situacións comunicativas reais. Este proceso non só mellora as súas habilidades argumentativas, senón que tamén fortalece o seu pensamento crítico. Ademais, a secuencia didáctica segue o ciclo da aprendizaxe a través da experiencia e organízase linealmente en tres tipos de tarefas: iniciais, posibilitadoras e finais.

A tarefa inicial ten a función de activar coñecementos previos e conectar coa secuencia didáctica anterior. As tarefas posibilitadoras están deseñadas para axudar a resolver a tarefa final, fomentando a investigación, a reflexión e a análise, co fin de explorar

novos coñecementos, estruturalos e conceptualízaos. Finalmente, a tarefa final consiste na creación dun novo texto, seguindo o modelo presentado ao principio e aplicando as aprendizaxes adquiridas ao longo da secuencia didáctica.

Tarefas

As tarefas son ferramentas educativas que lle permiten ao alumnado desenvolver de forma integral as competencias clave, xa que requiren mobilizar coñecementos, habilidades e estratexias para crear un produto nun contexto de práctica social, como, por exemplo, a elaboración dun texto para un evento comunicativo específico. Ademais, as tarefas deben incluír instrucións claras que lle faciliten ao alumnado o desenvolvemento do proceso, favorecendo así a autoavaliación e a autonomía.

Actividades

As actividades supoñen a aplicación de contidos conceptuais, o que supón levar a cabo un proceso mental sinxelo para resolver un problema. Estas actividades requiren comprensión e toma de decisións, así como a realización de procesos mentais como relacionar contidos, relacionar elementos, identificar termos relacionados nun texto e ler ou escoitar con comprensión. A súa finalidade é facilitar a adquisición de habilidades no ámbito individual.

Exercicios

Os exercicios son accións descontextualizadas que non teñen relación con situacións da vida real e que o alumnado adoita resolver de forma mecánica e única. O seu obxectivo é que o alumnado domine contidos específicos mediante a repetición. Polo xeral, o profesorado primeiro explica e exemplifica, despois o alumnado memoriza e reproduce a información mediante exercicios como cubrir os ocos, responder preguntas tipo test ou verdadeiro/falso ou memorizar un texto como fin en si mesmo. Non obstante, estes exercicios non contribúen significativamente á adquisición de habilidades. Poden ser útiles para a activación de saberes previos no inicio dunha secuencia didáctica ou para propiciar unha actividade de reflexión, pero non están presentes na fase final de avaliación.

Obxectivos da materia

Para a materia de Matemáticas II, de segundo de bacharelato, temos os seguintes obxectivos:

- OBX1 Modelizar e resolver problemas da vida cotiá e da ciencia e da tecnoloxía aplicando diferentes estratexias e formas de razoamento para obter posibles solucións.
- OBX2 Verificar a validez das posibles solucións dun problema empregando o razoamento e a argumentación para contrastar a súa idoneidade.
- OBX3 Formular ou investigar conxecturas ou problemas, utilizando o razoamento, a argumentación, a creatividade e o uso de ferramentas tecnolóxicas, para xerar novo coñecemento matemático.
- OBX4 Utilizar o pensamento computacional de forma eficaz, modificando, creando e xeneralizando algoritmos que resolvan problemas mediante o uso das matemáticas, para modelizar e resolver situacións da vida cotiá e do ámbito da ciencia e da tecnoloxía.
- OBX5 Establecer, investigar e utilizar conexións entre as diferentes ideas matemáticas establecendo vínculos entre conceptos, procedementos, argumentos e modelos para dar significado e estruturar a aprendizaxe matemática.
- OBX6 Descubrir os vínculos das matemáticas con outras áreas de coñecemento e profundar nas súas conexións, interrelacionando conceptos e procedementos, para modelizar, resolver problemas e desenvolver a capacidade crítica, creativa e innovadora en situacións diversas.
- OBX7 Representar conceptos, procedementos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnoloxías, para visualizar ideas e estruturar razoamentos matemáticos.
- OBX8 Comunicar as ideas matemáticas, de forma individual e colectiva, empregando o soporte, a terminoloxía e o rigor apropiados, para organizar e consolidar o pensamento matemático.
- OBX9 Utilizar destrezas persoais e sociais, identificando e xestionando as propias emocións, respectando as dos demais e organizando activamente o traballo en equipos heteroxéneos, aprendendo do erro como parte do proceso de aprendizaxe e afrontando situacións de incerteza, para perseverar na consecución de obxectivos na aprendizaxe das matemáticas.

Criterios de avaliación

Novamente debemos referirnos ao [Decreto 157/2022](#) para sinalar os criterios de avaliación para a materia de Matemáticas II. Estes criterios están ordenados segundo os sentidos xa sinalados (deste xeito, por exemplo, CA4 corresponde ao sentido alxébrico), e tamén indican a que obxectivo está vinculado:

- CA 1.1. e CA5.1. Adquirir novo coñecemento matemático mediante a formulación, razoamento e xustificación de conxecturas e problemas de forma autónoma. OBX3.
- CA1.2, CA2.1, CA3.1 e CA4.1. Demostrar unha visión matemática integrada, investigando e conectando as diferentes ideas matemáticas. OBX5.
- CA1.3, CA2.2, CA3.3 e CA5.4. Resolver problemas en situacións diversas, utilizando procesos matemáticos, reflexionando, establecendo e aplicando conexións entre o mundo real, outras áreas de coñecemento e as matemáticas. OBX6.
- CA2.3 e CA4.4. Obter todas as posibles solucións matemáticas de problemas da vida cotiá e da ciencia e a tecnoloxía, describindo o procedemento utilizado. OBX1.
- CA2.4. Seleccionar a solución máis adecuada dun problema en función do contexto (sostibilidade, consumo responsable, equidade...) usando o razoamento e a argumentación. OBX2.
- CA3.2 e CA5.2. Representar ideas matemáticas, estruturando diferentes razoamentos matemáticos e seleccionando as tecnoloxías máis adecuadas. OBX7.
- CA3.4 e CA5.3. Manexar diferentes estratexias e ferramentas, incluídas as dixitais, que modelizan e resoven problemas da vida cotiá e da ciencia e a tecnoloxía, seleccionando as máis adecuadas segundo a súa eficiencia. OBX1.
- CA4.2. Seleccionar e utilizar diversas formas de representación, valorando a súa utilidade para compartir información. OBX7.
- CA4.3. Resolver problemas en contextos matemáticos establecendo e aplicando conexións entre as diferentes ideas matemáticas. OBX5.
- CA4.5. Demostrar a validez matemática das posibles solucións dun problema utilizando o razoamento e a argumentación. OBX2.
- CA4.6. Integrar o uso de ferramentas tecnolóxicas na formulación ou investigación de conxecturas e problemas. OBX3.
- CA4.7. Interpretar, modelizar e resolver situacións problematizadas da vida cotiá e da ciencia e da tecnoloxía, utilizando o pensamento computacional, modificando, creando e xeneralizando algoritmos. OBX4.

- CA6.1. Analizar a achega das matemáticas ao progreso da humanidade, valorando a súa contribución na proposta de solucións a situacións complexas e aos retos científicos e tecnolóxicos que se presentan na sociedade. OBX6.
- CA6.2. Afrontar as situacións de incerteza e tomar decisións avaliando distintas opcións, identificando e xestionando emocións, e aceptando e aprendendo do erro como parte do proceso de aprendizaxe das matemáticas. OBX9.
- CA6.3. Mostrar unha actitude positiva e perseverante, aceptando e aprendendo da crítica razoada ao facer fronte ás diferentes situacións na aprendizaxe das matemáticas. OBX9.
- CA6.4. Traballar en tarefas matemáticas de forma activa en equipos heteroxéneos, respectando as emocións e experiencias dos demais e escoitando o seu razoamento, aplicando as habilidades sociais máis propicias e fomentando o benestar do equipo e as relacións saudables. OBX9.
- CA6.5. Mostrar organización ao comunicar as ideas matemáticas, empregando o soporte, a terminoloxía e o rigor apropiados. OBX8.
- CA6.6. Recoñecer e empregar a linguaxe matemática en diferentes contextos, comunicando a información con precisión e rigor. OBX8.

Competencias clave

Segundo o artigo 8 do [Decreto 157/2022](#), do 15 de setembro, polo que se establecen a ordenación e o currículo do bacharelato, temos as seguintes oito competencias clave:

- a) Competencia en comunicación lingüística
- b) Competencia plurilingüe
- c) Competencia matemática e competencia en ciencia, tecnoloxía e enxeñaría (STEM)
- d) Competencia dixital
- e) Competencia persoal, social e de aprender a aprender
- f) Competencia cidadá
- g) Competencia emprendedora
- h) Competencia en conciencia e expresión culturais

Na táboa [1.1](#) relacionamos os obxectivos coas competencias clave do [Decreto 157/2022](#):

Obxectivos	Competencias clave							
	CCL	CP	STEM	CD	CPSAA	CC	CE	CCEC
OBX 1			1-2-3	2-5	4-5		3	
OBX 2			1-2	3	4	3	3	
OBX 3	1		1-2	1-2-3-5			3	
OBX 4			1-2-3	2-3-5			3	
OBX 5			1-3	2-3				1
OBX 6			1-2	2	5	4	2-3	1
OBX 7			3	1-2-5			3	4.1-4.2
OBX 8	1-3	1	2-4	3				3.2
OBX 9		3	5		1.1-1.2 3.1-3.2	2-3	2	

Táboa 1.1: Relacións entre obxectivos e competencias clave.

Os seis (+1) sentidos

Na materia de Matemáticas II os criterios de avaliación e os contidos foron agrupados en bloques denominados «sentidos», entendidos como o conxunto de destrezas relacionadas co dominio en contexto de contidos numéricos, métricos, xeométricos, alxébricos, estocásticos e socioafectivos, que permiten empregalos dunha maneira funcional e con confianza na resolución de problemas ou na realización de tarefas. Os seis sentidos que aparecen no currículo son:

1. Sentido numérico
2. Sentido da medida
3. Sentido espacial
4. Sentido alxébrico
5. Sentido estocástico
6. Sentido socioafectivo

Non deixa de chamarnos a atención aos que escribimos este libro a ausencia dun sétimo sentido na materia de Matemáticas II: o sentido da abstracción.

ANEXO: Análise de distintas dimensións dunha situación de aprendizaxe

Deseguido presentamos a proposta de dimensións e indicadores que permiten determinar o carácter competencial dunha situación de aprendizaxe, baseadas na guía GAPPISA⁵ de Carles Monereo, así como na súa [páxina web](#) e nunha comunicación privada⁶, materiais sobre que fixemos variacións xa que están orientados a probas específicas.

Dimensión 1: Situación-problema inicial contextualizada. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe presenta unha situación-problema inicial, contextualizada e o máis actual posíbel para o problema formulado?
2. Analizouse se a situación de aprendizaxe proposta podería inserirse dentro dos Obxectivos de Desenvolvemento Sustentábel da UNESCO?

Dimensión 2: Tarefas e actividades auténticas. Indicadores de calidade:

1. As tarefas e actividades propostas son realistas e os datos ofrecidos, se é o caso, son reais?
2. Tentouse que as tarefas propostas sexan útiles e relevantes e na medida do posíbel próximas ao alumnado?

Dimensión 3: Tarefas e actividades de mobilización ou que fomentan actitudes. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe suscita preguntas que o alumnado debe afrontar con sentido crítico e ético?
2. A situación de aprendizaxe permite que o alumnado demostre creatividade e capacidade de decisión para seleccionar estratexias acaídas de resolución, utilizando coñecementos técnicos específicos?
3. A situación de aprendizaxe promove a convivencia?
4. A situación de aprendizaxe promove a igualdade?

⁵Guía GAPPISA: Carles Monereo (coord.) (2009) Pisa como excusa. Repensar la evaluación para cambiar la enseñanza. Barcelona: Graó.

⁶Monereo, C. (2024). Guía para la elaboración de pruebas de acceso. Manuscrito en preparación. Barcelona: Departamento de Psicología de la educación, Universitat Autònoma de Barcelona.

Dimensión 4: Tarefas e actividades de distinta complexidade cognitiva (taxonomía de Bloom) e regulación emocional. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe contén tarefas e/ou actividades de diferentes niveis de complexidade?
2. A complexidade das tarefas da situación de aprendizaxe encaixa cos obxectivos, criterios de avaliación e descritores operativos do currículo oficial?
3. Foméntase a adquisición de destrezas e actitudes como o esforzo, a tolerancia á frustración e á incerteza indispensábeis para afrontar eventuais situacións de tensión e ansiedade na aprendizaxe das matemáticas?

Dimensión 5: Formato heteroxéneo de enunciados e respostas. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe presenta datos de fontes diversas de carácter primario e secundario?
2. Tentouse presentar as tarefas nunha diversidade de formatos (texto, imaxe, gráfico etc.)?
3. Tentouse que as tarefas requiran diferentes formas de respostas? (escrito, gráfico etc.)?

Dimensión 6: Condicións para a resolución das tarefas. Indicadores de calidade:

1. As condicións para a resolución da proba son semellantes ás da vida real? O alumnado ten acceso a recursos para a resolución das tarefas?
2. As condicións de resolución están axustadas ás condicións do alumnado?

Dimensión 7: Promoción do razoamento, capacidade de pensar e abstracción. Indicadores de calidade:

1. As tarefas da situación de aprendizaxe promoven o razoamento abstracto?
2. A situación de aprendizaxe afonda no enfoque construtivista propiciando a recuperación e transformación de saberes previos e a relación desta materia con outras disciplinas?
3. A situación de aprendizaxe promove e estimula a metacognición, para o que cada alumna e cada alumno reflexione sobre cal é a súa maneira de aprender?

Dimensión 8: Avaliación do proceso. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe require que o alumnado explicite parte do proceso seguido durante a súa resolución?
2. Avalíase o axuste do alumnado a situacións novas e/ou inesperadas nas que saiba descartar datos innecesarios?
3. Avalíase o uso que fai o alumnado dos recursos proporcionados? (o alumnado poderá utilizar documentos ou ferramentas auxiliares, como dicionarios, calculadoras, formularios ou táboas)?
4. Desenvólvese unha avaliación formativa, informando o alumnado no inicio sobre os criterios de corrección e cualificación e ofrecendo no final actividades de reforzo ou de enriquecemento curricular?

Dimensión 9: Puntuacións e criterios compartidos. Indicadores de calidade:

1. Compártense co alumnado os criterios de corrección e os criterios de cualificación?
2. Compártese co alumnado a temporalización das tarefas?
3. Proporcionánselle ao alumnado indicacións para a realización das tarefas?

Dimensión 10: Atención á diversidade. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe atende á diversidade a través do deseño universal para a aprendizaxe e das diversas tarefas de reforzo e enriquecemento curricular?
2. No caso do alumnado con necesidades específicas de apoio educativo, tívose en conta que as adaptacións poderán consistir na adaptación dos tempos, a provisión de modelos especiais de exame (en canto ao formato) e a provisión ao alumnado do material e recursos humanos, asistencia e produtos de apoio necesarios?
3. Utilizouse unha linguaxe inclusiva, que respecte a diversidade, a pluralidade e os dereitos humanos do alumnado?
4. A situación de aprendizaxe promove a inclusión?



Influencers

Situación de aprendizaxe 1. Na actualidade, o fenómeno das redes sociais está a ser amplamente cuestionado pola adicción que xera, polo seu impacto na saúde mental, pola exposición a contido inapropiado, polo ciberacoso, ou pola cantidade de *fake news* que se propagan por elas, por citar algúns dos problemas máis analizados. A primeira delas foi [SixDegrees](#), no ano 1997, moito antes de nacer o alumnado que agora cursa segundo de bacharelato. Foi no ano 2004 cando apareceu Facebook, que corresponde ao ano do alumnado que cursa agora terceiro curso universitario. Posteriormente xurdiron YouTube (2005), Twitter (2006), WhatsApp (2009), Instagram (2010), Pinterest (2010), Twitch (2011) ou TikTok (2016).

En 2024, calcúlase que hai máis de 1,56 millóns de *influencers* en España (recoméndase o emprego de *influentes* en galego, *influenciador/a* en portugués, *influyentes* en castelán, e *influenceuses* (f) ou *influenceurs* (m) en francés). Nesta cifra inclúense todas as persoas creadoras de contidos, tanto profesionais coma afeccionadas, que teñen unha importante audiencia nas redes sociais. De todas estas persoas, máis de 13.600 *influencers* son profesionais que viven da creación de contidos, o que supón un incremento do 13,3% con respecto ao ano anterior. Ademais, hai máis de 63.000 creadoras/es con máis de 10.000 seguidoras/es e 1.100 con máis de 1 millón de seguidoras/es.

Nesta primeira situación de aprendizaxe pretendemos reflexionar sobre distintas cuestións para alumnado e profesorado, como pode ser a brecha de xénero existente, como na maioría das actividades laborais. Como reto final debe evidenciarse un produto final: construción dun texto que se sirva da resolución das distintas tarefas e empregue os estímulos presentados para facer unha proposta dun instrumento de uso educativo dos *influencers* para a docencia de matemáticas.

Imaxe de fondo obtida de <https://www.freepik.com>

Estímulo 1.1: Os *influencers*, un recurso publicitario «revello» que segue a estar de moda a pesar de ter máis dun milleiro de anos de historia.

Desde que existe o comercio, as tendas buscan ter clientes glamurosos que proxecten unha imaxe atractiva do establecemento e que atraia a visita doutros compradores anónimos. Pero non é ata mediados do século XX, que se desenvolve a sociedade de consumo, cando esta actividade se bautiza como márketing de influencia. Unha disciplina que propicia a colaboración entre marcas e individuos famosos (chamados, nun primeiro momento, embaixadores de marca) e que nos deixa célebres estampas de grandes deportistas lucindo reloxos caros, estrelas de cine conducindo coches de alta gama ou humoristas vendendo lavadoras.

Unha estratexia publicitaria que se volveu moi popular nos últimos anos, especialmente co auxe das redes sociais. Os novos embaixadores de marca móvense en plataformas dixitais e reciben o nome de *influencers*. Unha etiqueta que alberga unha gran amalgama de *bloggers*, *youtubers*, *instagramers*, *tiktokers* ou calquera persoa recoñecible e que teña a capacidade de influír nas decisións de compra da súa audiencia. De Ibai Llanos a El Rubius pasando por Michenlo, Gala González ou Alexandra Pereira, a nómina de prescritores é interminable, ao igual que sucede cos temas sobre os que falan (beleza, estilo de vida, videoxogos, viaxes, deporte, alimentación, espectáculos,...).

Para escollelas e escollelos, as marcas seleccionan a líderes de opinión en cada segmento que lle interesa identificando as temáticas que abordan e as plataformas nas que operan. Sobre esa selección inicial escollen os e as *influencers* a partir de datos obxectivos como é o número de *followers*, a súa taxa de interacción (cantidade de reaccións que obtén unha publicación en relación co número de seguidores), o número de *likes* que atesouran ou o volume de comentarios que provocan.

A idea é que as e os *influencers*, ao ter unha conexión máis próxima e auténtica coa súa audiencia, poidan comunicar a mensaxe da marca dunha maneira máis efectiva e crible. Por iso adoitan buscar perfís de persoas con moita empatía, que teñen unha audiencia fiel e que realizan publicacións altamente compartidas polos internatutas.

Entre os beneficios que lles reporta esta práctica ás marcas que invisten en *influencers* podemos destacar a credibilidade (porque os consumidores e consumidoras tenden a confiar máis nas recomendacións de persoas que seguen e admiran que na publicidade tradicional), o alcance (porque chegan a moita xente), a orixinalidade (posto que o contido que se crea é verosímil e creado expresamente para esa promoción) e a interacción coas audiencias (un gran valor engadido que ofrecen os medios dixitais).

Cuestiónase, porén, a súa autenticidade e transparencia (porque nunca queda claro ata que punto se trata de consellos verídicos ou patrocinados), a ética e responsabilidade (porque, en moitos casos, estes *influencers* anuncian produtos que teñen limitacións para ser promovidos na TV ou noutros medios publicitarios clásicos), a privacidade (porque introducen unha mensaxe publicitaria non desexada no noso momento de ocio) e o impacto no comportamento do consumidor (trasladándolle unha visión nesgada do mundo e que, en moitas veces, inclúe tópicos tóxicos como son os estereotipos de xénero ou a sexualización das persoas).

Sexa como fose, o márketing de influencia atinxiu cotas inauditas a través dos medios dixitais e constitúe unha das principais estratexias promocionais ao alcance das marcas. O futuro, da man da intelixencia artificial, apunta a que as e os *influencers* reais convivan (e se confundan) con humanoides recreados de maneira virtual que potencien as súas fortalezas pero tamén as malas prácticas nas que incorren os *influencers*. Un uso da tecnoloxía atractivo, pero tamén arrepiante.

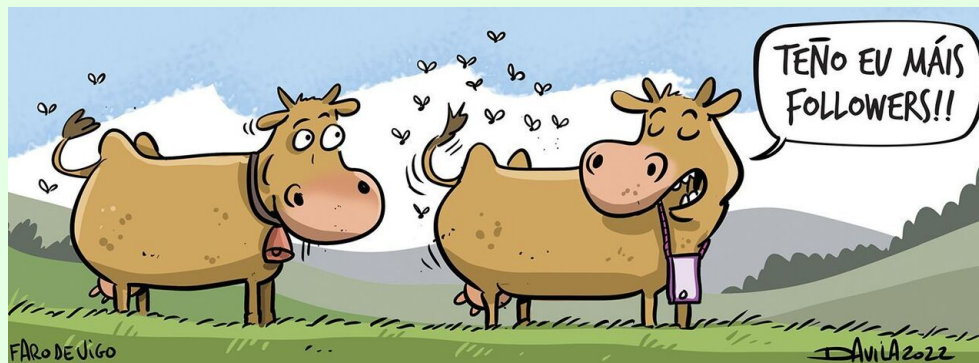
Texto de **Jesús Pérez Seoane**, profesor na [Facultade de Comunicación](#) da [Universidade de Vigo](#).

Estímulo 1.2: Viñeta de [Xosé Lois González Vázquez](#), “o Carrabouxo”, publicada no xornal [La Región](#)



<https://carrabouxo.es/2019/07/04/carra3-7-19/>

Estímulo 1.3: Viñeta de [Luís Davila Malvido](#), “o Bichero”, publicada no xornal *Faro de Vigo*



<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=5200803159931913>

Tarefa 1.1. (2,25 puntos) Tempo estimado para a resolución: 25 minutos. Estímase que unha persoa *macro-influencer* (persoa que acumula entre 50.000 e 100.000 *followers* —seguidoras/es—) percibe entre 500 e 1.200€ por publicación, dependendo de diversos factores como a rede social, a exclusividade coa marca, o formato, ..., tal e como se recolle no estímulo 1.1.

Sofía é *macro-influencer*. Nas súas publicacións comparte rutinas de exercicios para facer na casa e publicita marcas de roupa, calzado deportivo e equipamento de ximnasio de baixo custo e que utilizan materiais ecolóxicos na súa fabricación. Na seguinte táboa reflíctense o número de publicacións de Sofía nunha determinada rede social nos tres últimos meses onde, como podes ver, non lembra os ingresos do mes de xullo :

Mes	Marca A	Marca B	Marca C	Ingresos totais
Xullo	5	7	3	? €
Agosto	4	6	5	11.200€
Setembro	6	3	4	9.300€

1. (1,25 puntos) Investiga o que pagan as marcas A, B e C por cada publicación (podes empregar algún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#)).
2. (0,5 puntos) En función do resultado anterior, poderías descubrir cal é o rango de valores dos ingresos de Sofía no mes de xullo?
3. (0,5 puntos) Segundo os resultados, para que ingresos totais no mes de xullo se maximizan e se minimizan os ingresos pola marca C?

Solución. (1) Sexan x , y e z o que pagan as marcas A, B e C, respectivamente, por cada publicación. Tendo en conta a información recollida na táboa, podemos formular o seguinte sistema de ecuacións lineares:

$$\begin{cases} 5x + 7y + 3z = m, \\ 4x + 6y + 5z = 11.200 \\ 6x + 3y + 4z = 9.300 \end{cases} \quad (1.1)$$

onde m é un valor descoñecido. Se definimos as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 11.200 \\ 9.300 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

podemos formular o sistema de ecuacións (1.1) como

$$AX = B. \quad (1.3)$$

Temos que

$$\det(A) = 71, \quad (1.4)$$

de xeito que o rango de A é máximo e coincide co rango da matriz ampliada $(A|B)$, que tamén é 3. Xa que logo, en virtude do teorema de Rouché-Frobenius temos garantido que o sistema é compatíbel e determinado, é dicir, existe unha única solución do sistema para cada valor fixo de m .

Se resolvemos o sistema (1.3) cun programa de cálculo simbólico, como os sinalados no enunciado, obtemos

$$x = \frac{1}{71}(9m - 54.700), \quad y = \frac{2}{71}(7m - 49.250), \quad z = \frac{2}{7}(13.375 - m). \quad (1.5)$$

(2) Posto que os ingresos determinados en (1.5) teñen que ser cantidades non negativas, obtemos que

$$9m - 54.700 \geq 0, \quad 7m - 49.250 \geq 0, \quad 13.375 - m \geq 0, \quad (1.6)$$

de onde resultan as seguintes tres desigualdades

$$m \geq 6.077,78, \quad m \geq 7.035,71, \quad m \leq 13.375. \quad (1.7)$$

Xa que logo, os ingresos do mes de xullo estiveron no intervalo

$$m \in [7.035,71, 13.375]. \quad (1.8)$$

(3) Temos o valor mínimo en z (ingresos pola marca C) cando $m = 13.375$, de xeito que $z = 0$. Ao termos unha recta con pendente negativa o valor máximo ocorre cando

$$m = \frac{49250}{7} \approx 7.035,71. \quad (1.9)$$

□

Tarefa 1.2. (2,25 puntos) Tempo estimado para a resolución: 30 minutos.

Nunha empresa de márketing e análise de datos de *influencers*, queren estudar os datos de crecemento das contas de tres *influencers* (Sofía, Xoán e Lucas) para recomendarlle a unha marca sobre a quen deben contratar pola súa proxección nas redes.

A empresa emprega un sistema de coordenadas tridimensional (x, y, z) onde:

- x representa o tempo en meses.
- y representa o número de *followers* (podes lembrar o estímulo 1.3).
- z representa o número de interaccións que recibe dos seus *followers* (comentarios, *likes* etc).

Con estas notacións temos

$$\text{Conta Sofía} \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad \text{Conta Xoán} \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 + 7t, \\ z = 1, \end{cases} \quad \text{Conta Lucas} \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 8 + 2t, \\ z = t/2. \end{cases} \quad (1.10)$$

O departamento de análise de datos da empresa de márketing determina que o plano π representa o número máximo de interaccións que pode ter un *influencer* segundo o número de *followers* ao longo do tempo, e a súa ecuación é:

$$\pi : 7x - y - 5z = 6. \quad (1.11)$$

Ese departamento determinou que os *influencers* son idóneos cando a súa conta se acerca ao límite máximo de interaccións máis veces.

Para facer esta tarefa deberanse formar grupos de seis persoas. Cada grupo deberá estudar a posición da conta dun dos *influencers* con respecto ao número máximo de interaccións dos seus *followers*. Unha vez calculado, o grupo deberá decidir cal sería o consello que a empresa debería darlle á marca en función dos resultados obtidos. Finalmente, farase unha posta en común do resultado de todos os grupos para tomar unha decisión entre toda a clase. A avaliación terá as seguintes puntuacións: traballo en grupo, 1 punto; cálculo da posición de cada recta respecto ao plano, 0,75 puntos; elección de *influencer*, 0,5 puntos.

Solución. Temos que estudar a posición relativa das tres rectas das contas de Sofía, Xoán e Lucas co plano π , que representa o número máximo de interaccións. O vector normal do

dito plano π é $\vec{n}_\pi = (7, -1, -5)$.

No caso da conta de Sofía, a recta pasa polo punto $P_S(2, 3, 1)$ e ten vector director $\vec{v}_S = (1, 2, 1)$. Se facemos o produto escalar do vector normal do plano co vector director da recta resulta

$$(1, 2, 1) \cdot (7, -1, -5) = 7 - 2 - 5 = 0, \quad (1.12)$$

de xeito que ou ben a recta da conta de Sofía é paralela ao plano ou ben a recta está contida no plano π que representa o número máximo de interaccións. Estudamos se o punto P_S está contido no plano:

$$7 \cdot 2 - 3 - 5 = 6, \quad (1.13)$$

polo que a recta correspondente a Sofía está contida no plano π . Xa que logo, o número de interaccións axústase ao óptimo establecido pola empresa en todo momento.

No caso da conta de Xoán, temos o punto $P_X(1, 3, 1)$ e o vector director $\vec{v}_X = (1, 7, 0)$. Neste caso, se calculamos o produto escalar do vector normal $\vec{n}_\pi$ e o correspondente vector director resulta

$$(1, 7, 0) \cdot (7, -1, -5) = 7 - 7 = 0, \quad (1.14)$$

polo que novamente ou ben a recta é paralela ao plano ou ben a recta está contida no plano. Estudamos se o punto P_X está contido no plano:

$$7 - 3 - 5 = -1 \neq 6 \quad (1.15)$$

de xeito que a recta é paralela. Isto significa que o número de interaccións non se axusta ao óptimo establecido pola empresa en ningún momento.

Finalmente, no caso da conta de Lucas, temos o punto $P_L(2, 8, 0)$ mais o vector director $\vec{v}_L = (1, 2, 1/2)$. Neste caso temos que

$$(1, 2, 1/2) \cdot (7, -1, -5) = 7 - 2 - \frac{5}{2} \neq 0, \quad (1.16)$$

polo que a recta corta o plano, o que significa que o número de interaccións só se axusta ao óptimo establecido pola empresa nun instante de tempo.

Despois desta análise podemos afirmar que a empresa debe contratar a Sofía porque o número de interaccións está axustado ao óptimo establecido pola empresa en todo momento. $\square$

Tarefa 1.3. (2,25 puntos) Tempo estimado para a resolución: 25 minutos. Unha *influencer* comeza a súa carreira nas redes sociais e espera ter

$$f(t) = 10(t - 10)^3 + 10.000 \quad (1.17)$$

followers en cada instante de tempo t medido en meses, que estará comprendido no intervalo $[0, 30]$.

1. (0,5 puntos) Segundo o esperado pola *influencer*, o seu número de *followers* será unha función crecente no tempo ou haberá períodos de decrecemento? Analiza os intervalos de tempo onde se espera que crezan e que decrezan.
2. (0,5 puntos) Segundo a previsión estimada, haberá algún punto de inflexión no número de *followers* da *influencer*? No caso de que exista, que indica ese punto de inflexión en relación ao crecemento de *followers*?
3. (0,5 puntos) Representa graficamente os *followers* esperados pola *influencer* utilizando algún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#).
4. (0,75 puntos) Determina o promedio mensual de *followers* durante os 20 primeiros meses, sabendo que o promedio dunha función $f(t)$ nun intervalo $[a, b]$ vén dado por

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt. \quad (1.18)$$

Solución. (1) Para analizar os intervalos de crecemento e decrecemento da función calculamos a derivada

$$f'(t) = 30(t - 10)^2. \quad (1.19)$$

Posto que se trata dunha función polinomial, os posíbeis extremos relativos da función son os puntos onde se anule a derivada:

$$30(t - 10)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 10. \quad (1.20)$$

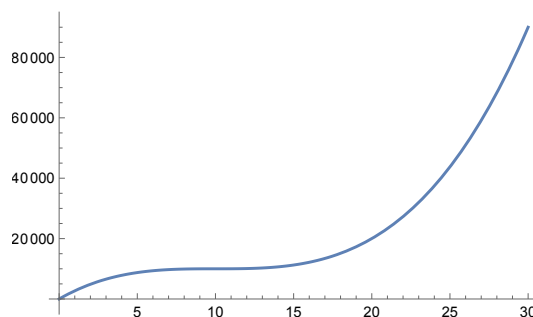
O único posíbel extremo está no mes décimo. Se analizamos o signo da derivada antes e despois do posíbel extremo, temos que antes do punto $t = 10$ a derivada é positiva ao ser un cadrado, igual que o signo despois do punto $t = 10$. Polo tanto, non hai extremo relativo nese punto. Máis aínda, empregando que $f'(t) \geq 0$ temos que a función é crecente en todo o seu dominio, polo que atinxe o mínimo absoluto en $t = 0$ e o máximo absoluto en $t = 30$.

(2) Posto que

$$f''(t) = 60(t - 10) \quad (1.21)$$

temos un posíbel punto de inflexión no punto $t = 10$. Ademais, no intervalo $(0, 10)$ temos que $f''(t) < 0$ polo que $f(t)$ é cóncava como a función $-t^2$ e no intervalo $(10, 30)$ temos que $f''(t) > 0$ polo que $f(t)$ é convexa como a función t^2 . Isto implica un cambio na tendencia no crecemento de *followers*.

(3) A representación gráfica da función $f(t)$ é a seguinte:



(4) Para determinar o promedio mensual de *followers* nos 20 primeiros meses integramos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{20} \int_0^{20} f(t) dt &= \frac{1}{20} \int_0^{20} (10(t-10)^3 + 10.000) dt \\
 &= \frac{1}{20} \left[\frac{5t^4}{2} - 100t^3 + 1500t^2 \right]_{x=0}^{x=20} \\
 &= \frac{1}{20} \left[\frac{5 \cdot 20^4}{2} - 100 \cdot 20^3 + 1500 \cdot 20^2 \right] \\
 &= \frac{200.000}{20} = 10.000 \text{ followers ao mes.} \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

□

Tarefa 1.4. (2,25 puntos) Tempo estimado para a resolución: 25 minutos. Analizada a conta de Sofía, atopamos que a probabilidade de que un dos seus *followers* interaccione con ela en cada publicación (comentarios, *likes* etc) por calquera das redes sociais que aparecen no estímulo 1.2 é de 0,45. Escollidas 100 destas persoas ao chou, queremos que calcules a probabilidade exacta (0,5 puntos), e que calcules a probabilidade aproximada (0,75 puntos) de que, logo dun *post* (publicación), 40 desas 100 persoas teñan interaccionado con Sofía. Explica os resultados obtidos (0,5 puntos). Para a resolución podes consultar a táboa da distribución normal $N(0; 1)$.

Solución. En primeiro lugar, indicamos como se podería calcular a probabilidade exacta. Temos que a variábel aleatoria é unha binomial de tamaño $n = 100$ e probabilidade $p = 0,45$:

$$X \sim B(100; 0,45). \quad (1.23)$$

Entón, para obter o resultado exacto temos que calcular

$$P(X = 40) = \binom{100}{40} 0,45^{40} \cdot 0,55^{60} = 0,0488. \quad (1.24)$$

Posto que

$$n = 100 \geq 30, \quad np = 45 > 5, \quad nq = 55 > 5, \quad (1.25)$$

podemos aproximar a distribución binomial por unha distribución normal con media e desviación

$$\mu = np = 45, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{24,75} = 4,9749. \quad (1.26)$$

Xa que logo, se denotamos con Z a distribución normal con media $\mu = 0$ e desviación $\sigma = 1$, a probabilidade con corrección de continuidade é

$$\begin{aligned} P(X = 40) &\approx P\left(\frac{39,5 - 45}{4,975} < Z \leq \frac{40,5 - 45}{4,975}\right) = P(-1,11 < Z \leq -0,9) \\ &= P(Z \leq -0,9) - P(Z \leq -1,11) = 1 - P(Z \leq -0,9) - (1 - P(Z \leq -1,11)) \\ &= P(Z \leq 1,11) - P(Z \leq 0,9) = 0,8665 - 0,8159 = 0,0506. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Pode ser interesante observar o erro cometido ao aproximar o resultado exacto empregando a distribución binomial (1.24) polo resultado aproximado empregando a distribución normal (1.27):

$$|0,0488 - 0,0506| = 0,0018. \quad (1.28)$$

□

Tarefa extra 1.1. Constrúe un texto sobre as problemáticas do abuso das redes sociais en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 1.2. Unha consultora externa á empresa quere analizar se hai nesgo de xénero nas cantidades que reciben as persoas por publicar *posts* nunha determinada rede social. Para iso analizan as publicacións e os ingresos de catro *macro-influencers*. A consultora revisa o número de publicacións, e estima en función dun parámetro m as cantidades recibidas en miles de euros, xa que a empresa non quere dar os datos. Os valores cos que traballa a consultora están recollidos na seguinte táboa:

Mes	Pedro	Ramón	Iria	Mariña	Ingresos
Xaneiro	6	0	4	0	$m\text{€}$
Febreiro	3	2	0	5	$m+1\text{€}$
Marzo	0	6	4	0	$m+3\text{€}$
Abril	2	4	1	3	$2m\text{€}$

1. Estuda para que valores de m é correcta a conxectura dos ingresos realizada pola consultora.
2. Estuda para que valores de m non hai nesgo de xénero, é dicir, cando a suma das cantidades percibidas polos homes é igual á suma das cantidades percibidas polas mulleres.
3. Existen valores de m para os cales os ingresos de Iria e Mariña son superiores aos de Pedro e Ramón?
4. Que rexión de valores de m ten maior área, a superficie na que Pedro e Ramón teñen máis ingresos ou a superficie na que Iria e Mariña teñen máis ingresos? Podes explicar o resultado obtido?

Solución. (1) Consideramos as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} P \\ R \\ I \\ M \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m+1 \\ m+3 \\ 2m \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Se resolvemos o sistema $AX = B$ obtemos que

$$P = \frac{1}{30}(23m - 40), \quad R = \frac{1}{30}(23m - 25), \quad (1.30)$$

$$I = \frac{1}{30}(60 - 27m), \quad M = \frac{1}{30}(40 - 17m). \quad (1.31)$$

Posto que os ingresos teñen que ser cantidades non negativas, resultan as seguintes

desigualdades:

$$\begin{cases} m \geq \frac{40}{23} \approx 1,7391, & m \geq \frac{25}{23} \approx 1,0869, \\ m \leq \frac{60}{27} \approx 2,222, & m \leq \frac{40}{17} \approx 2,3592. \end{cases} \quad (1.32)$$

Xa que logo, para que as catro persoas teñan ingresos non negativos resulta o seguinte intervalo para o parámetro m :

$$m \in \left[\frac{40}{23}, \frac{60}{27} \right]. \quad (1.33)$$

(2) Para que non haxa nesgo de xénero ten que suceder que a suma dos ingresos de Pedro e Ramón dadas en (1.30) sexa igual á suma dos ingresos de Iria e Mariña dadas en (1.31), é dicir:

$$\frac{1}{30}(23m - 40) + \frac{1}{30}(23m - 25) = \frac{1}{30}(60 - 27m) + \frac{1}{30}(40 - 17m), \quad (1.34)$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{30}(46m - 65) = \frac{10}{3} - \frac{22m}{15} \Leftrightarrow 3m - \frac{11}{2} = 0, \quad (1.35)$$

de onde o único valor para o cal non existiría nesgo de xénero é

$$m = \frac{11}{6}. \quad (1.36)$$

(3) Para determinar se hai valores para os cales os ingresos de Iria e Mariña son superiores aos ingresos de Pedro e Ramón, temos que analizar a desigualdade

$$\frac{10}{3} - \frac{22m}{15} \geq \frac{1}{30}(46m - 65). \quad (1.37)$$

Posto que xa temos o único valor no que se produce a igualdade, analizamos o signo da inecuación antes (ou despois) de $m = 11/6$ de onde obtemos que os valores de m para os que os ingresos de Iria e Mariña son superiores aos ingresos de Pedro e Ramón están no intervalo

$$m \in \left[\frac{40}{23}, \frac{11}{6} \right]. \quad (1.38)$$

(4) Finalmente, a rexión na que os ingresos de Pedro e Ramón son maiores ten a seguinte área

$$A_{PR} = \int_{m=11/6}^{m=60/27} \left(3m - \frac{11}{2} \right) dm = \frac{49}{216} \approx 0,226852, \quad (1.39)$$

mentres que

$$A_{IM} = \int_{m=40/23}^{m=11/6} \left(\frac{11}{2} - 3m \right) dm = \frac{169}{12696} \approx 0,0133, \quad (1.40)$$

polo que a área de Pedro e Ramón é (moi) superior á de Iria e Mariña.

□

Tarefa extra 1.3. Un dos buscadores de Internet máis célebres ten o seu fundamento no chamado cálculo de valores e vectores propios de matrices. Máis concretamente, cando buscamos información sobre un tema concreto e obtemos unha listaxe ordenada de páxinas web que poden resolver a nosa dúbida, como se obtén a orde na que aparecen cada unha das opcións? A idea de fondo é supoñer que a importancia x_j de cada páxina P_j é proporcional á suma das importancia das páxinas que enlazan con P_j . Por exemplo, supoñamos que a páxina P_1 aparece citada nas páxinas P_2 , P_{33} e P_{51} ; por outra banda a páxina P_2 aparece citada nas páxinas P_4 e P_7 ; logo veñen moitas páxinas, e que a n -ésima páxina P_n (e derradeira!) aparece citada en P_1 , P_2 , P_{33} , P_{51} , P_4 e P_7 . Entón as importancia x_j de cada páxina P_j teñen esta representación onde k é unha constante de proporcionalidade:

$$\begin{cases} x_1 = k(x_2 + x_{33} + x_{51}), \\ x_2 = k(x_4 + x_7), \\ \vdots \\ x_n = k(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_{33} + x_{51}). \end{cases} \quad (1.41)$$

Podemos escribir a anterior relación como un (enorme) sistema de ecuacións lineares:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0_{32} & 1_{33} & 0 & \cdots & 0_{50} & 1_{51} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0_{32} & 1_{33} & 0 & \cdots & 0_{50} & 1_{51} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Isto lévanos a analizar o problema como o cálculo das constantes λ e dos vectores X (distintos do cero) para unha matriz dada M do seguinte xeito

$$MX = \lambda X. \quad (1.43)$$

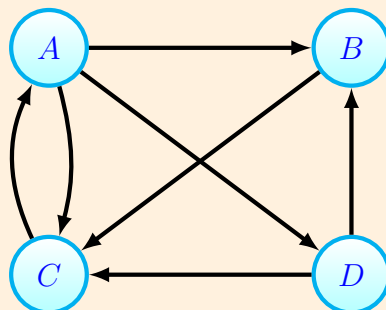
Os valores das constantes λ chámanse valores propios da matriz M e os vectores X distintos do cero para cada unha das constantes reciben o nome de vectores propios da matriz M (asociados ao valor propio λ). Para o cálculo dos valores propios λ dunha matriz cadrada M simplemente resolvemos a ecuación

$$\det(M - \lambda I) = 0, \quad (1.44)$$

onde I é a matriz identidade do mesmo tamaño ca M , e posteriormente para cada valor propio calculamos os vectores propios asociados.

Un problema semellante é o que se atopa en calquera liga deportiva. Normalmente as clasificacións veñen dadas polo número de vitorias durante a liga. Pero non sería máis xusto ter en conta a que equipos se lles gaña? Por dar un exemplo bastante representativo, na liga de baloncesto norteamericana (NBA) todos os equipos xogan 82 partidos durante a chamada «tempada regular» antes de xogar os denominados «play-offs». Debido ás grandes distancias que terían que percorrer, dividen os equipos en dúas conferencias (leste e oeste) que, á súa vez, están divididas en tres divisións. A conferencia leste está dividida nas divisións atlántica, central e sueste, mentres que a conferencia oeste está dividida nas divisións suroeste, noroeste e pacífica. Se ben todos xogan 82 partidos, non todos xogan o mesmo número de partidos contra cada equipo, senón que adoitan xogar máis partidos contra os da propia conferencia, xustamente para minimizar os desprazamentos. Unha vez remata a tempada regular e hai que escoller 16 equipos para os «play-offs», o que se fai é simplemente ter en conta o número de vitorias obtidas por cada equipo. A pregunta que xorde de xeito natural é a seguinte: se unha conferencia é especialmente forte ou especialmente débil, e xa que os equipos xogan máis partidos contra os equipos da súa propia conferencia, non habería que ter en conta a «calidade» das vitorias de cada equipo? Iso é xustamente a idea do buscador ao que antes nos referíamos. Esta mesma idea aparece en moitos outros contextos.

Se retomamos o buscador, matematicamente formulamos o modelo dicindo que a importancia de cada páxina é proporcional á suma ponderada das importancia das páxinas que apuntan a ela, onde ponderada significa que debemos dividir estas importancia entre o número de ligazóns saíntes. O modelo reflicte o que ocorrería se unha persoa navegase seguindo ligazóns ao azar (isto chámase unha *cadea de Markov*); a importancia convenientemente normalizada será a porcentaxe de visitas. Considera a seguinte estrutura web moi simplificada:



1. Escribe o sistema de ecuacións das importancia das páxinas web.
2. Comproba que $\lambda = 1$ é unha solución da ecuación $\det(M - \lambda I) = 0$.
3. Calcula os vectores propios asociados ao valor propio $\lambda = 1$.
4. Cal é o valor da importancia de cada páxina web? Que páxina web é a máis importante?

Solución. (1) Sexan x, y, z e w a importancia de cada páxina web A, B, C e D , respectivamente. Formulamos o sistema de ecuacións lineares:

$$x = \lambda z, \quad y = \lambda \left(\frac{x}{3} + \frac{w}{2} \right), \quad z = \lambda \left(\frac{x}{3} + y + \frac{w}{2} \right), \quad w = \lambda \frac{x}{3}, \quad (1.45)$$

que podemos escribir en forma matricial mediante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

(2) Para os valores propios temos que resolver a ecuación

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -\lambda & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & -\lambda & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 - \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{6} = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

É doado verificar que $\lambda = 1$ é unha raíz do polinomio de grao catro.

(3) Para $\lambda = 1$, resolvemos o sistema de ecuacións lineares

$$MX = X, \quad (1.48)$$

que conduce a

$$x = z, \quad y = \frac{x}{3} + \frac{w}{2}, \quad z = \frac{x}{3} + y + \frac{w}{2}, \quad w = \frac{x}{3}, \quad (1.49)$$

que ten por solucións

$$t \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad t \neq 0. \quad (1.50)$$

(4) O autovector obtido en (1.50) indica que as páxinas web A e C son igual de importantes e teñen a maior importancia (valor 3). A páxina web B ten a seguinte importancia (valor 3/2). A páxina web D ten a menor importancia (valor 1). $\square$

1.1 Análise das dimensións do carácter competencial da situación de aprendizaxe *Influencers*

No que segue presentamos, para a situación de aprendizaxe titulada “*Influencers*”, a análise das dimensións presentadas ao final do marco teórico, que permiten medir o carácter competencial dunha situación de aprendizaxe. Tal e como xa foi sinalado, estas dimensións están baseadas na guía GAPPISA⁷ de Carles Monereo, así como na súa [páxina web](#) e nunha comunicación privada⁸, materiais sobre que fixemos variacións xa que están orientados a probas específicas

Dimensión 1: Situación-problema inicial contextualizada. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe presenta unha situación-problema inicial, contextualizada e o máis actual posíbel para o problema formulado?
2. Analizouse se a situación de aprendizaxe proposta podería inserirse dentro dos Obxectivos de Desenvolvemento Sustentábel da UNESCO?

Respostas. (1) A introdución fai unha reflexión sobre a situación das redes sociais que contextualiza toda a proposta. Toda a situación de aprendizaxe desenvólvese nese mesmo contexto.

(2) Si, está relacionada cos ODS 3, 5, 10, 12 e 17. □

Dimensión 2: Tarefas e actividades auténticas. Indicadores de calidade:

1. As tarefas e actividades propostas son realistas e os datos ofrecidos, se é o caso, son reais?
2. Tentouse que as tarefas propostas sexan útiles e relevantes e na medida do posíbel próximas ao alumnado?

Respostas. (1) Si, están enmarcadas no modelo de negocio das persoas *influencers* e os datos ofrecidos nas tarefas 1.1 e 1.4 son reais. Os datos das tarefas 1.2 e 1.3 creáronse con *chatGPT*.

⁷Guía GAPPISA: Carles Monereo (coord.) (2009) Pisa como excusa. Repensar la evaluación para cambiar la enseñanza. Barcelona: Graó.

⁸Monereo, C. (2024). Guía para la elaboración de pruebas de acceso. Manuscrito en preparación. Barcelona: Departamento de Psicología de la educación, Universitat Autònoma de Barcelona.

(2) As tarefas proporcionan información sobre as persoas *influencers*, que é un tema próximo que pode resultar de interese para o alumnado. ☐

Dimensión 3: Tarefas e actividades de mobilización ou que fomentan actitudes. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe suscita preguntas que o alumnado debe afrontar con sentido crítico e ético?
2. A situación de aprendizaxe permite que o alumnado demostre creatividade e capacidade de decisión para seleccionar estratexias acaídas de resolución, utilizando coñecementos técnicos específicos?
3. A situación de aprendizaxe promove a convivencia?
4. A situación de aprendizaxe promove a igualdade?

Respostas. (1) Si, co modelo de negocio das persoas *influencers*.

(2) O alumnado ten que mobilizar coñecementos e seleccionar estratexias matemáticas para a resolución das tarefas.

(3) Toda a situación pode abordarse de forma colaborativa, mesmo a tarefa 2 está deseñada para o traballo en grupo.

(4) En concreto abórdase na tarefa 1.2 (e na tarefa extra 1.1). ☐

Dimensión 4: Tarefas e actividades de distinta complexidade cognitiva (taxonomía de Bloom) e regulación emocional. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe contén tarefas e/ou actividades de diferentes niveis de complexidade?
2. A complexidade das tarefas da situación de aprendizaxe encaixa cos obxectivos, criterios de avaliación e descritores operativos do currículo oficial?
3. Foméntase a adquisición de destrezas e actitudes como o esforzo, a tolerancia á frustración e á incerteza indispensábeis para afrontar eventuais situacións de tensión e ansiedade na aprendizaxe das matemáticas?

Respostas. (1) As catro actividades presentan diferentes niveis de complexidade. Mesmo pode apreciarse entre os apartados dalgunhas.

(2) Detallárase no apartado seguinte: Análise da relación co currículo oficial.

(3) A resolución de problemas nos que interveñen as matemáticas representa un desafío que involucra multitude de emocións que o alumnado debe xestionar correctamente. As destrezas socioafectivas dentro da aprendizaxe das matemáticas fomentan o benestar do alumnado, a regulación emocional e o interese polo seu estudo. ☐

Dimensión 5: Formato heteroxéneo de enunciados e respostas. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe presenta datos de fontes diversas de carácter primario e secundario?
2. Tentouse presentar as tarefas nunha diversidade de formatos (texto, imaxe, gráfico etc.)
3. Tentouse que as tarefas requiran diferentes formas de respostas? (escrito, gráfico etc.)?

Respostas. (1) Si.

(2) Nos enunciados da situación de aprendizaxe hai imaxes, viñetas, táboas, texto e linguaxe matemática.

(3) Nas respostas suxeridas espérase que haxa gráficos, texto e linguaxe matemática. ☐

Dimensión 6: Condicións para a resolución das tarefas. Indicadores de calidade:

1. As condicións para a resolución da proba son semellantes ás da vida real? O alumnado ten acceso a recursos para a resolución das tarefas?
2. As condicións de resolución están axustadas ás condicións do alumnado?

Respostas. (1) Poden usar medios tecnolóxicos e poden contar con axuda doutras persoas dentro da aula.

(2) O alumnado dispón deses medios na aula. ☐

Dimensión 7: Promoción do razoamento, capacidade de pensar e abstracción. Indicadores de calidade:

1. As tarefas da situación de aprendizaxe promoven o razoamento abstracto?
2. A situación de aprendizaxe afonda no enfoque construtivista propiciando a recuperación e transformación de saberes previos e a relación desta materia con outras disciplinas?
3. A situación de aprendizaxe promove estimula a metacognición, para o que cada alumna e cada alumno reflexione sobre cal é a súa maneira de aprender?

Respostas. (1) As tarefas propostas potencian a capacidade de resolver problemas que permiten unha comprensión máis profunda de conceptos matemáticos e a súa aplicación en problemas da vida real.

(2) A situación de aprendizaxe céntrase en que o alumnado constrúa novos coñecementos a partir dos seus saberes previos, o que permite unha maior conexión e aplicación interdisciplinaria dos conceptos aprendidos.

(3) O alumnado pode avaliar a súa propia aprendizaxe tendo en conta a forma de abordar as tarefas mobilizando os seus coñecementos matemáticos e co traballo colaborativo.

□

Dimensión 8: Avaliación do proceso. Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe require que o alumnado explicita parte do proceso seguido durante a súa resolución?
2. Avaliase o axuste do alumnado a situacións novas e/ou inesperadas nas que o alumnado saiba descartar datos innecesarios?
3. Avaliase o uso que fai o alumnado dos recursos proporcionados? (o alumnado poderá utilizar documentos ou ferramentas auxiliares, como dicionarios, calculadoras, formularios ou táboas)?
4. Desenvólvese unha avaliación formativa, informando o alumnado no inicio sobre os criterios de corrección e cualificación e ofrecendo no final actividades de reforzo ou de enriquecemento curricular?

Respostas. (1) Debe facerse en toda a tarefa.

(2) A tarefa non inclúe datos innecesarios que se deban descartar.

(3) O alumnado ten que saber utilizar a calculadora e algunhas aplicacións de software educativo para a materia de Matemáticas II.

(4) A proposta é que cada tarefa, a desenvolver en distintos momentos do curso académico, teña un peso do 25% da cualificación final de toda a situación de aprendizaxe que, á súa vez, terá un peso en relación con outras actividades de avaliación que se poidan desenvolver. Preséntanse tarefas (extra) de enriquecemento curricular. ☐

Dimensión 9: Puntuacións e criterios compartidos. Indicadores de calidade:

1. Compártense co alumnado os criterios de corrección e os criterios de cualificación?
2. Compártese co alumnado a temporalización das tarefas?
3. Proporcionánselle ao alumnado indicacións para a realización das tarefas?

Respostas. (1) A profesora ou o profesor poden establecer os criterios de cualificación e de corrección.

(2) Si.

(3) Si, nalgúns casos. ☐

Dimensión 10: Atención á diversidade Indicadores de calidade:

1. A situación de aprendizaxe atende á diversidade a través do deseño universal para a aprendizaxe e das diversas tarefas de reforzo e enriquecemento curricular?
2. No caso do alumnado con necesidades específicas de apoio educativo, tívose en conta que as adaptacións poderán consistir na adaptación dos tempos, a provisión de modelos especiais de exame (en canto ao formato) e a provisión ao alumnado do material e recursos humanos, asistencia e produtos de apoio necesarios?
3. Utilizouse unha linguaxe inclusiva, que respecte a diversidade, a pluralidade e os dereitos humanos do alumnado?
4. A situación de aprendizaxe promove a inclusión?

Respostas. (1) Si. A situación de aprendizaxe inclúe actividades variadas, en grupo e individuais e formula actividades de afondamento.

(2) Si.

(3) Si.

(4) Si, toda vez que se poden adoptar medidas de acceso ao currículo para o alumnado con necesidade específica de apoio educativo e de enriquecemento curricular. $\square$

De seguido presentamos a táboa 1.2 co resumo da análise das dez dimensións para a situación de aprendizaxe titulada “*Influencers*”:

DIMENSIÓN	CUMPRIMENTO
1. Situación-problema inicial contextualizada	Si
2. Tarefas e actividades auténticas	Si
3. Tarefas e actividades de mobilización ou que fomentan actitudes	Si
4. Tarefas e actividades de distinta complexidade cognitiva e regulación emocional	Si
5. Formato heteroxéneo de enunciados e respostas	Si
6. Condicións para a resolución das tarefas	Si
7. Promoción do razoamento, capacidade de pensar e abstracción	Si
8. Avaliación do proceso	Si
9. Puntuacións e criterios compartidos	Si
10. Atención á diversidade	Si

Táboa 1.2: Táboa resumo da análise das dimensións para a situación de aprendizaxe *Influencers*

1.2 Análise dos criterios, obxectivos, descritores operativos e contidos das tarefas 1.1–1.4 da situación de aprendizaxe *Influencers*

Co obxecto de facilitar a lectura da análise que presentamos dos criterios, obxectivos, descritores operativos e contidos de cada unha das tarefas 1.1.–1.4 da situación de aprendizaxe titulada *Influencers*, recollemos a listaxe dos obxectivos e criterios de avaliación que aparecen no [Decreto 157/2022](#), do 15 de setembro, polo que se establecen a ordenación e o currículo do bacharelato na Comunidade Autónoma de Galicia (DOG núm. 183, de 26 de setembro) para a materia Matemáticas II, se ben poden consultarse na referencia legal sinalada e tamén no marco teórico desta publicación. Tamén recollemos un resumo dos descritores operativos do currículo de bacharelato para facilitar a lectura das distintas análises que se presentan.

1.2.1 Obxectivos da materia Matemáticas II

- OBX1 Modelizar e resolver problemas da vida cotiá e da ciencia e da tecnoloxía aplicando diferentes estratexias e formas de razoamento para obter posibles solucións.
- OBX2 Verificar a validez das posibles solucións dun problema empregando o razoamento e a argumentación para contrastar a súa idoneidade.
- OBX3 Formular ou investigar conxecturas ou problemas, utilizando o razoamento, a argumentación, a creatividade e o uso de ferramentas tecnolóxicas, para xerar novo coñecemento matemático.
- OBX4 Utilizar o pensamento computacional de forma eficaz, modificando, creando e xeneralizando algoritmos que resolvan problemas mediante o uso das matemáticas, para modelizar e resolver situacións da vida cotiá e do ámbito da ciencia e da tecnoloxía.
- OBX5 Establecer, investigar e utilizar conexións entre as diferentes ideas matemáticas establecendo vínculos entre conceptos, procedementos, argumentos e modelos para dar significado e estruturar a aprendizaxe matemática.
- OBX6 Descubrir os vínculos das matemáticas con outras áreas de coñecemento e profundar nas súas conexións, interrelacionando conceptos e procedementos, para modelizar, resolver problemas e desenvolver a capacidade crítica, creativa e innovadora en situacións diversas.
- OBX7 Representar conceptos, procedementos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnoloxías, para visualizar ideas e estruturar razoamentos matemáticos.
- OBX8 Comunicar as ideas matemáticas, de forma individual e colectiva, empregando o soporte, a terminoloxía e o rigor apropiados, para organizar e consolidar o pensamento matemático.

OBX9 Utilizar destrezas persoais e sociais, identificando e xestionando as propias emocións, respectando as dos demais e organizando activamente o traballo en equipos heteroxéneos, aprendendo do erro como parte do proceso de aprendizaxe e afrontando situacións de incerteza, para perseverar na consecución de obxectivos na aprendizaxe das matemáticas.

1.2.2 Criterios de avaliación

- CA 1.1. e CA5.1. Adquirir novo coñecemento matemático mediante a formulación, razoamento e xustificación de conxecturas e problemas de forma autónoma. OBX3.
- CA1.2, CA2.1, CA3.1 e CA4.1. Demostrar unha visión matemática integrada, investigando e conectando as diferentes ideas matemáticas. OBX5.
- CA1.3, CA2.2, CA3.3 e CA5.4. Resolver problemas en situacións diversas, utilizando procesos matemáticos, reflexionando, establecendo e aplicando conexións entre o mundo real, outras áreas de coñecemento e as matemáticas. OBX6.
- CA2.3 e CA4.4. Obter todas as posibles solucións matemáticas de problemas da vida cotiá e da ciencia e da tecnoloxía, describindo o procedemento utilizado. OBX1.
- CA2.4. Seleccionar a solución máis adecuada dun problema en función do contexto (sustentabilidade, consumo responsable, equidade...) usando o razoamento e a argumentación. OBX2.
- CA3.2 e CA5.2. Representar ideas matemáticas, estruturando diferentes razoamentos matemáticos e seleccionando as tecnoloxías máis adecuadas. OBX7.
- CA3.4 e CA5.3. Manexar diferentes estratexias e ferramentas, incluídas as dixitais, que modelizan e resoven problemas da vida cotiá e da ciencia e da tecnoloxía, seleccionando as máis adecuadas segundo a súa eficiencia. OBX1.
- CA4.2. Seleccionar e utilizar diversas formas de representación, valorando a súa utilidade para compartir información. OBX7.
- CA4.3. Resolver problemas en contextos matemáticos establecendo e aplicando conexións entre as diferentes ideas matemáticas. OBX5.
- CA4.5. Demostrar a validez matemática das posibles solucións dun problema utilizando o razoamento e a argumentación. OBX2.
- CA4.6. Integrar o uso de ferramentas tecnolóxicas na formulación ou investigación de conxecturas e problemas. OBX3.
- CA4.7. Interpretar, modelizar e resolver situacións problematizadas da vida cotiá e da ciencia e da tecnoloxía, utilizando o pensamento computacional, modificando, creando e xeneralizando algoritmos. OBX4.
- CA6.1. Analizar a achega das matemáticas ao progreso da humanidade, valorando a súa contribución na proposta de solucións a situacións complexas e aos retos científicos e tecnolóxicos que se presentan na sociedade. OBX6.
- CA6.2. Afrontar as situacións de incerteza e tomar decisións avaliando distintas opcións, identificando e xestionando emocións, e aceptando e aprendendo do erro como parte do proceso de aprendizaxe das matemáticas. OBX9.

- CA6.3. Mostrar unha actitude positiva e perseverante, aceptando e aprendendo da crítica razoada ao facerlles fronte ás diferentes situacións na aprendizaxe das matemáticas. OBX9.
- CA6.4. Traballar en tarefas matemáticas de forma activa en equipos heteroxéneos, respectando as emocións e experiencias dos demais e escoitando o seu razoamento, aplicando as habilidades sociais máis propicias e fomentando o benestar do equipo e as relacións saudables. OBX9.
- CA6.5. Mostrar organización ao comunicar as ideas matemáticas, empregando o soporte, a terminoloxía e o rigor apropiados. OBX8.
- CA6.6. Recoñecer e empregar a linguaxe matemática en diferentes contextos, comunicando a información con precisión e rigor. OBX8.

1.2.3 Descritores operativos ao completar o bacharelato

1. CCL-Competencia en comunicación lingüística
 - (a) CCL1. Exprésase de xeito oral, escrito, signado ou multimodal con fluidez, ...
 - (b) CCL2. Comprende, interpreta e valora con actitude crítica textos orais, ...
 - (c) CCL3. Localiza, selecciona e contrasta de xeito autónomo información ...
 - (d) CCL4. Le con autonomía obras relevantes da literatura e ponas en relación ...
 - (e) CCL5. Pon as súas prácticas comunicativas ao servizo da convivencia ...
2. CP-Competencia plurilingüe
 - (a) CP1. Utiliza con fluidez, adecuación e aceptable corrección unha ou máis linguas, ...
 - (b) CP2. A partir das súas experiencias, desenvolve estratexias que lle permitan ampliar ...
 - (c) CP3. Coñece e valora criticamente a diversidade lingüística e cultural ...
3. STEM-Competencia matemática e competencia en ciencia, tecnoloxía e enxeñaría ...
 - (a) STEM1. Selecciona e utiliza métodos indutivos e dedutivos propios do razoamento matemático ...
 - (b) STEM2. Utiliza o pensamento científico para entender e explicar fenómenos ...
 - (c) STEM3. Formula e desenvolve proxectos deseñando e creando prototipos ou ...
 - (d) STEM4. Interpreta e transmite os elementos máis relevantes de investigacións ...
 - (e) STEM5. Planea e emprende accións fundamentadas científicamente ...
4. CD-Competencia dixital
 - (a) CD1. Realiza procuras avanzadas comprendendo como funcionan os motores de procura na internet, ...
 - (b) CD2. Crea, integra e reelabora contidos dixitais de forma individual ou colectiva, ...
 - (c) CD3. Selecciona, configura e utiliza dispositivos dixitais, ferramentas, aplicacións ...
 - (d) CD4. Avalía riscos e aplica medidas ao usar as tecnoloxías dixitais para protexer ...
 - (e) CD5. Desenvolve solucións tecnolóxicas anovadoras e sustentables para dar resposta ...
5. CPSAA-Competencia persoal, social e de aprender a aprender

- (a) CPSAA1.1. Fortalece o optimismo, a resiliencia, a autoeficacia e a procura ...
 - (b) CPSAA2. Adopta de maneira autónoma un estilo de vida sustentable e ...
 - (c) CPSAA3.1. Amosa sensibilidade cara ás emocións e as experiencias dos demais ...
 - (d) CPSAA3.2. Distribúe nun grupo as tarefas, os recursos e as responsabilidades ...
 - (e) CPSAA4. Compara, analiza, avalía e sintetiza datos, información e ideas ...
 - (f) CPSAA5. Planifica a longo prazo avaliando os propósitos e os procesos ...
6. CC-Competencia cidadá
- (a) CC1. Analiza feitos, normas e ideas relativas á dimensión social, histórica, ...
 - (b) CC2. Recoñece, analiza e aplica en diversos contextos, de forma crítica ...
 - (c) CC3. Adopta un xuízo propio e argumentado ante problemas éticos e filosóficos ...
 - (d) CC4. Analiza as relacións de interdependencia e ecodependencia entre ...
7. CE-Competencia emprendedora
- (a) CE1. Avalía necesidades e oportunidades e afronta retos, con sentido crítico ...
 - (b) CE2. Avalía e reflexiona sobre as fortalezas e as debilidades propias e ...
 - (c) CE3. Leva a cabo o proceso de creación de ideas e solucións anovadoras ...
8. CCEC-Competencia en conciencia e expresión culturais.
- (a) CCEC1. Reflexiona, promove e valora criticamente o patrimonio cultural ...
 - (b) CCEC2. Investiga as especificidades e as intencionalidades de ...
 - (c) CCEC3.1. Expresa ideas, opinións, sentimentos e emocións con creatividade ...
 - (d) CCEC3.2. Descubre a autoexpresión, a través da interacción corporal e ...
 - (e) CCEC4.1. Selecciona e integra con creatividade diversos medios e soportes, ...
 - (f) CCEC4.2. Planifica, adapta e organiza os seus coñecementos, as súas destrezas ...

1.2.4 Análise das tarefas 1.1.–1.4.

Tarefa 1.1. (2,25 puntos)

1. Obxectivos descritos na sección 1.2.1: OBX1, OBX4, OBX5, OBX6
2. Criterios de avaliación descritos na sección 1.2.2:
 - (a) CA1.3: STEM1, STEM2
 - (b) CA4.1: CD3
 - (c) CA4.4: STEM1, CE3
 - (d) CA4.7: STEM2, CD3
3. Descritores operativos descritos na sección 1.2.3: STEM1, STEM2, CD3, CE3
4. Contidos:
 - (a) Sentido numérico:

- i. Estratexias para operar con números reais, vectores, matrices e determinantes: cálculo mental ou escrito nos casos sinxelos e con ferramentas tecnolóxicas nos casos máis complicados.
- (b) Sentido alxébrico:
- i. Uso de sistemas de ecuacións para modelizar situacións da vida cotiá e da ciencia e da tecnoloxía.
 - ii. Técnicas e uso de matrices para, polo menos, modelizar situacións nas que aparezan sistemas de ecuacións lineais ou grafos.
 - iii. Análise, formulación e resolución de problemas da vida cotiá e da ciencia e da tecnoloxía empregando as ferramentas ou os programas máis adecuados.
 - iv. Emprego de programas computacionais para as operacións con matrices, cálculo da matriz inversa, de determinantes ou resolución de sistemas.

Tarefa 1.2. (2,25 puntos)

1. Obxectivos descritos na sección 1.2.1: OBX1, OBX6, OBX9
2. Criterios de avaliación descritos na sección 1.2.2:
 - (a) CA3.3: STEM1
 - (b) CA3.4: CPSAA5
 - (c) CA6.4: STEM5, CPSAA3.1, CPSAA3.2, CC3
3. Descritores operativos descritos na sección 1.2.3: STEM1, STEM5, CPSAA3.1, CPSAA3.2, CPSAA5, CC3
4. Contidos:
 - (a) Sentido espacial:
 - i. Estudo de incidencia, paralelismo, distancias e ángulos de obxectos xeométricos no espazo. Representación mediante ferramentas dixitais.
 - ii. Modelos matemáticos (xeométricos, alxébricos...) para resolver problemas no espazo. Conexións con outras disciplinas e áreas de interese.
 - iii. Resolución de problemas de incidencia, paralelismo, distancias e ángulos de obxectos xeométricos no espazo. Cálculo de áreas e volumes.
 - iv. Conxecturas xeométricas no espazo: validación por medio da dedución e da demostración.

Tarefa 1.3. (2,25 puntos)

1. Obxectivos descritos na sección 1.2.1: OBX2, OBX3, OBX5, OBX7
2. Criterios de avaliación descritos na sección 1.2.2:
 - (a) CA2.1: STEM1

- (b) CA2.4: STEM2
 - (c) CA4.2: CCEC4.2
 - (d) CA4.3: STEM1
 - (e) CA4.6: CD3
3. Descriptores operativos descritos na sección 1.2.3: STEM1, STEM2, CCEC4.2, CD3
4. Contidos:
- (a) Sentido da medida:
 - i. Concepto de integral definida. Interpretación da integral definida como a área baixo unha curva. Propiedades.
 - ii. Regra de Barrow.
 - iii. Técnicas elementais para o cálculo de primitivas: integrais inmediatas e case inmediatas, por partes, cambio de variábel e racionais con raíces reais.
 - (b) Sentido alxébrico:
 - i. Aplicación do cálculo de derivadas ao estudo de intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos, intervalos de concavidade e convexidade, puntos de inflexión.
 - ii. Representación, análise e interpretación de funcións con ferramentas dixitais.

Tarefa 1.4. (2,25 puntos)

1. Obxectivos descritos na sección 1.2.1: OBX1, OBX6
2. Criterios de avaliación descritos na sección 1.2.2:
- (a) CA2.2. = CA5.4: STEM1, CE3
 - (b) CA5.3: STEM2, CPSAA5
3. Descriptores operativos descritos na sección 1.2.3: STEM1, STEM2, CE3, CPSAA5
4. Contidos:
- (a) Sentido da medida:
 - i. A probabilidade como medida da incerteza asociada a fenómenos aleatorios: interpretación subxectiva, clásica e frecuentista.
 - (b) Sentido estocástico:
 - i. Modelización de fenómenos estocásticos mediante as distribucións de probabilidade binomial e normal. Cálculo de probabilidades asociadas mediante ferramentas tecnolóxicas.
 - ii. Cálculo de probabilidades mediante a aproximación da binomial pola normal.

Nas seguintes táboas 1.3–1.6 presentamos un resumo das análises realizadas:

OBXECTIVOS	CRIT. AVAL.	DESC. OPER.	TAREFA
OBX1	CA4.4	STEM1	1.1
		CE3	1.1
	CA3.4-CA5.3	STEM2	1.4
		CPSAA5	1.2
OBX2	CA2.4	STEM2	1.3
OBX3	CA4.6	CD3	1.3
OBX4	CA4.7	STEM2	1.1
		CD3	
OBX5	CA4.1	CD3	1.1
	CA2.1	STEM1	1.3
	CA4.3		
OBX6	CA1.3-CA3.3	STEM1	1.1, 1.2
		STEM2	1.1
	CA2.2	STEM1 CE3	1.4
OBX7	CA4.2	CCEC4.2	1.3
OBX8	CA6.5	STEM2 CD3 CCEC3.2	Transversal
	CA6.6	CCL1 CCL3 CP3	
OBX9	CA6.2	CPSAA1.2	Transversal
		CE2	
	CA6.3	CPSAA1.1	1.2
	CA6.4	STEM5	
		CPSAA3.1	
		CPSAA3.2	
		CC3	

Táboa 1.3: Táboa resumo de obxectivos, criterios de avaliación, descritores operativos e tarefas para a situación de aprendizaxe *Influencers*.

TAREFA	PROCED. MATEM.	OBX.	CRIT.	COMPET.
1.1 (2,25 p)	Formula o sistema: 0,5 p	OBX6	CA1.3	STEM1: 0,25 p STEM2: 0,25 p
	Resuelve o sistema: 0,75 p	OBX5	CA4.1	CD3: 0,75 p
	Calcula rango ingresos: 0,5 p	OBX4	CA4.7	STEM2: 0,25 p CE3: 0,25 p
	Maximiza e minimiza: 0,5 p	OBX1	CA4.4	STEM1: 0,25 p CE3: 0,25 p
1.2 (2,25 p)	Traballo en grupo: 1 p	OBX9	CA6.4	STEM5: 0,25 p CPSAA3.1: 0,25 p CPSAA3.2: 0,25 p CC3: 0,25 p
	Posición recta-plano: 0,75 p	OBX1	CA3.4	CPSAA5: 0,75 p
	Elección de influencer: 0,5 p	OBX6	CA3.3	STEM1: 0,25 p STEM2: 0,25 p
1.3 (2,25 p)	Estudo do crecemento e decrecemento: 0,5 p	OBX5	CA4.3	STEM1: 0,5 p
	Estudo puntos inflexión: 0,25 p Interpretación: 0,25 p	OBX2	CA2.4	STEM2: 0,5 p
	Representación gráfica: 0,5 p	OBX7	CA4.2	CCEC4.2: 0,25 p
		OBX3	CA4.6	CD3: 0,25 p
	Cálculo integral definida: 0,5 p Cálculo promedio: 0,25 p	OBX5	CA2.1	STEM1: 0,75 p
1.4 (2,25 p)	Identificación binomial: 0,25 p Cálculo binomial: 0,5 p	OBX1	CA5.3	CPSAA5: 0,75 p
	Aproximación pola normal: 0,25 p Cálculo de μ e σ : 0,25 p Tipificación e corrección Yates: 0,25 p Cálculo final: 0,25 p	OBX1	CA5.3	STEM2: 1 p
	Comparación e explicación resultados: 0,5 p	OBX6	CA5.4	STEM1: 0,25 p CD3: 0,25 p

Táboa 1.4: Resumo da avaliación proposta, en función das tarefas, e desagregando a puntuación para cada unha das competencias para a situación de aprendizaxe *Influencers*

TAREFA	PROCEDIMENTO	OBX.	CRIT.	COMPET.
Transversal (1,00 p)	Recoñece linguaxe [...]: 0,3 p	OBX8	CA6.5 CA6.6	STEM2: 0,1 p CD3: 0,05 p CCEC3.2: 0,05 p CCL1: 0,05 p CCL3: 0,05 p
	Xestiona adecuadamente [...]: 0,1 p	OBX9	CA6.2	CPSAA1: 0,05 p CE2: 0,05 p
	Afronta con actitude [...]: 0,1 p	OBX9	CA6.3	CPSAA1: 0,1 p
	Traballa en equipo [...]: 0,4 p	OBX9	CA6.4	STEM5: 0,1 p CPSAA3.1: 0,1 p CPSAA3.2: 0,1 p CC3: 0,1 p
	Coñece e valora [...]: 0,1 p	OBX8	CA6.6	CP3: 0,1 p

Táboa 1.5: Resumo da avaliación proposta, en función das tarefas, e desagregando a puntuación para cada unha das competencias para a situación de aprendizaxe *Influencers* (cont.)

	CCL	CP	STEM	CD	CPSAA	CC	CE	CCEC	TOTAL
Tarefa 1.1			1	0,75			0,5		2,25
Tarefa 1.2			0,75		1,25	0,25			2,25
Tarefa 1.3			1,75	0,25				0,25	2,25
Tarefa 1.4			1,25		0,75		0,25		2,25
Transversal	0,1	0,1	0,2	0,05	0,35	0,1	0,05	0,05	1,00
Total	0,1	0,1	4,95	1,05	2,35	0,35	0,8	0,3	10

Táboa 1.6: Táboa resumo da concreción curricular das tarefas 1.1–1.4 da situación de aprendizaxe *Influencers*

Agricultura ecolóxica

Situación de aprendizaxe 2. Os alimentos locais, tamén coñecidos como alimentos «km 0», son aqueles que se producen relativamente preto do lugar onde se consomen. Optar por estes alimentos significa escoller produtos que tiveron un percorrido moito máis curto desde o lugar de cultivo ata a túa mesa. Ademais de ser beneficiosos para a economía local, son máis frescos e teñen máis nutrientes ao recollese no momento adecuado de maduración. O consumo deste tipo de produtos axuda a reducir o desperdicio de alimentos, a pegada de carbono, ou o uso excesivo de plásticos, por dar algúns exemplos.

Tradicionalmente, a agricultura é considerada unha das actividades humanas máis primitivas. Non se pode entender a historia da humanidade sen ter sempre presente esta actividade, que xogou un papel fundamental en moitas civilizacións, sendo motivo de conflitos entre pobos, e tamén fonte de inspiración para a arte, a literatura, a tecnoloxía, ... A importancia desta actividade levou ao ser humano a prestarlle sempre moita atención, a coidala como se merece e a facela evolucionar da mellor maneira posíbel.

Nos últimos tempos existe unha corrente que está a gañar cada vez máis persoas adeptas, a agricultura ecolóxica, que pretende que esta actividade regrese ás orixes, a cando non existían nin os químicos sintéticos nin os organismos xeneticamente modificados, co obxectivo de conseguir produtos máis naturais e saudábeis, cunha maior calidade nutritiva, onde os procesos biolóxicos e naturais sexan a razón de ser desta actividade, perseguindo a sustentabilidade deste sistema de produción e tamén a protección do medio ambiente. Como reto final debe evidenciarse un produto final: a construción dun texto que se sirva da resolución das distintas tarefas e empregue os estímulos presentados para facer unha proposta para un comedor escolar.

Imaxe de fondo obtida de <https://www.freepik.com>

Estímulo 2.1: Agricultura ecolóxica.

Segundo a [FAO](#) o termo agricultura ecolóxica, tamén denominada orgánica ou biolóxica, refírese ao proceso que utiliza métodos que respectan o medio ambiente, dende as etapas de produción até as de transformación e comercialización. Este tipo de agricultura non só se ocupa do produto senón de todo o sistema onde se asenta esa produción incluíndo os procesos que permiten levar ese produto até o consumidor final.

Segundo o *[Codex Alimentarius](#)* para a Produción, Procesamento, Etiquetado e comercialización dos alimentos producidos organicamente a agricultura ecolóxica busca promover e mellorar a saúde dos ecosistemas, incluíndo os ciclos biolóxicos e a actividade biolóxica do solo aumentando a fertilidade. A gandería ecolóxica respectaría o benestar animal e os seus ciclos biolóxicos. Para isto poden utilizarse técnicas innovadoras pero tamén tradicionais e evítase o uso de agroquímicos (como fertilizantes e praguicidas sintéticos) e de organismos modificados xeneticamente. No caso da gandería daríase prioridade á alimentación producida na propia granxa fronte á alimentación industrial e a un manexo que previse enfermidades co fin de utilizar os menos medicamentos posibles. Como obxectivos da agricultura ecolóxica poden citarse, entre outros: producir alimentos de máxima calidade nutritiva, sanitaria e organoléptica; ser ambientalmente sustentábel e economicamente viábel; manter a diversidade xenética do sistema agrario e do seu entorno; aumentar e manter a fertilidade do chan; preservar a seguridade alimentaria e evitar as formas de contaminación que poidan resultar das técnicas agrarias.

Cabe preguntarse por que xorde o concepto de agricultura ecolóxica toda vez que os seres humanos levan practicando agricultura dende o Neolítico e facendo evolucionar os ecosistemas agrarios conxuntamente co manexo humano dos mesmos. As técnicas de produción agraria deron un salto cualitativo no obxectivo de incrementar os rendementos e a produción, na época contemporánea, especialmente na segunda metade do século XX coa mecanización da agricultura. Esta vai contribuír ao éxodo rural e a mellorar o abastecemento das cidades, cada vez máis grandes e poboadas.

A **mecanización** supón a primeira etapa da industrialización da agricultura e algúns autores a sitúan en Europa entre 1958 e 1963. A Europa do final da Segunda Guerra Mundial necesitaba reconstruír a capacidade de produción de alimentos e suplir a escaseza de man de obra provocada pola guerra. A introdución masiva de maquinaria, favorecida por políticas públicas, provoca unha serie de cambios no manexo dos agroecosistemas como: a concentración de parcelas, o abandono daquelas que non se poden mecanizar, a selección de cultivos máis mecanizábeis (cereais) mentres se abandonan outros (remolacha-alfalfa), a simplificación das rotacións de cultivo, a selección de especies vexetais e animais adaptadas á mecanización coa conseguinte perda de variedades xenéticas... (o que non se cultiva ou cría, desaparece).

Nunha segunda etapa, entre 1963 e 1973 aproximadamente, prodúcese a chamada revolución verde e con ela a **quimización** da agricultura, é dicir, a aplicación masiva da industria da química pesada aos factores de produción agrarios como os fertilizantes e os praguicidas. Neste período a xeneralización do uso de agroquímicos acelera a industrialización da agricultura que substitúe factores de produción propios por outros de orixe industrial. Por outra parte, o incremento da produción cerealeira a gran escala fai que se desenvolvan novos mercados como o da alimentación animal.

Xa xurdiron neste momento voces que alertaban sobre as consecuencias negativas para os ecosistemas da utilización masiva de agroquímicos. A publicación do libro de [Rachel Carson](#), Primavera Silenciosa, alertando dos efectos do [DDT](#) (potente praguicida) é considerada un fenómeno fito da conciencia ecoloxista.

A partir do ano 1973 comezaría a etapa de bioloxización da agricultura onde a incorporación de cultivos e razas seleccionadas xeneticamente van considerarse o factor de cambio nos sistemas agrarios e gandeiros. As consecuencias para os agroecosistemas teñen que ver coa especialización das granxas, a desaparición do policultivo, unha maior dependencia de factores de produción procedentes das industrias, a desaparición de variedades vexetais e animais etc.

Por outra parte, a industrialización dos sistemas agrarios leva aparelhada unha serie de efectos negativos sobre os ecosistemas en xeral e sobre a saúde humana en forma de contaminación, especialmente das augas (p. ex. eutrofización por exceso de nitratos en augas subterráneas) e dos solos. Pero, ademais, as mudanzas nos sistemas de cultivo tamén teñen consecuencias sobre a paisaxe agraria, que se transforma de xeito importante. O incremento da produtividade por unidade de superficie e a concentración da actividade agraria en determinadas zonas (máis cómodas para a mecanización) fai que noutras áreas desapareza a agricultura e sexa substituída por outras actividades, por exemplo a explotación forestal, ou ás veces por nada en particular.

A agricultura ecolóxica preséntase como unha alternativa á agricultura industrial para tratar de facer da produción de alimentos unha actividade sustentábel. Para isto diversas políticas públicas téñense posto en marcha co fin de fomentala. Neste sentido podemos destacar que na Unión Europea as [medidas de Agroambiente e Clima](#) ofrecen aos agricultores contratos de 5 a 7 anos polos que reciben unha compensación a cambio de transformar os seus modos de produción cara a agricultura ecolóxica. Existen, ademais, regulamentos que conteñen os criterios do que se considera agricultura ecolóxica e un selo que identifica a eses produtos no mercado, de xeito que sexan recoñecidos e valorizados por quen os consome.

Máis aló da agricultura ecolóxica a agroecoloxía engade a dimensión social. A agroecoloxía, inspirada por diversos modelos de agricultura tradicional, promove a diversificación dos cultivos como unha estratexia de conservación da biodiversidade que, á súa vez, proporciona servizos ecosistémicos tales como a fertilidade do solo, o manexo e a regulación de pestes e enfermidades ou servizos de polinización. Ao mesmo tempo busca a autonomía, resiliencia e soberanía do sistema alimentario sen esquecer a dimensión social e política que persegue a xustiza social.

Texto de **Ana Isabel García Arias**, profesora titular de universidade da área de Economía, Socioloxía e Política Agraria na [Escola Politécnica Superior de Enxeñaría](#) do campus de Lugo. A profesora García Arias pertence ao [Centro de Investigación Interuniversitario das Paisaxes Atlánticas Culturais \(CISPAC\)](#).

Estímulo 2.2: Viñeta de [Xosé Lois González Vázquez](#), “O Carrabouxo”, publicada no xornal [La Región](#)



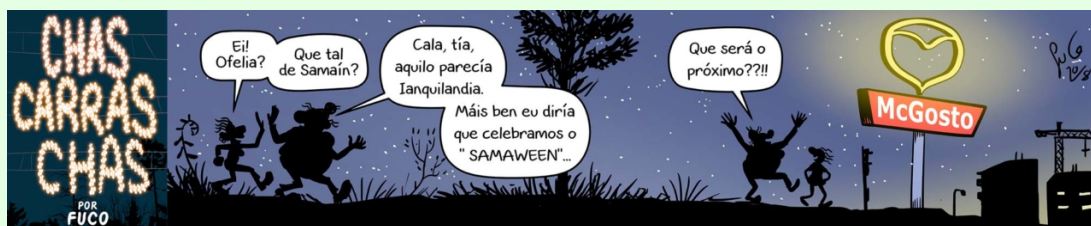
<https://carrabouxo.es/2023/08/02/carra31-7-23-2/>

Estímulo 2.3: Viñeta de [Luís Davila Malvido](#), “O Bichero”, publicada no xornal *Faro de Vigo*



<http://obichero.blogspot.com/2019/12/suministro-de-productos.html>

Estímulo 2.4: Viñeta de Pablo Prado “Fuco” publicada en *Novas do Eixo Atlántico*



https://pabloprado.net/wp-content/uploads/2019/06/chas_McGosto_peke-1280x256.jpg

Tarefa 2.1. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. A cooperativa HORECOGAL S.L. (Hortalizas Ecológicas Galegas S.L.), dedicada á produción de hortalizas mediante as técnicas e procesos da agricultura ecolóxica, quere elaborar o deseño para a produción de tres das dezasete variedades autóctonas de tomates: Apementado, Convento e Negro. Queren enviar os seus produtos á [estación espacial internacional](#), posibelmente dun xeito distinto ao que recolle Davila no estímulo 2.3. En primeiro lugar, toman como referencia os datos sobre a produción dos dous últimos anos. Estes datos son os que se reflicten na seguinte táboa na que se sinala para cada unha das variedades a superficie cultivada en m^2 e a produción total en quilogramos nos anos 2023 e 2024:

Ano	m^2 Apementado	m^2 Convento	m^2 Negro	Produción total (kg)
2023	200	400	300	8.500
2024	400	600	200	11.800

1. Á vista da información anterior, é posíbel que a produción de cada variedade (kg/m^2) fose a mesma nos dous últimos anos? Xustifica a resposta.

De cara a precisar un pouco máis o deseño de produción para o vindeiro ano e supoñendo que a produción de cada variedade (kg/m^2) sempre é a mesma todos os anos, tamén queren ter en conta os datos sobre a produción de hai tres anos. O caso é que o persoal actual da cooperativa non recorda con claridade a superficie cultivada que se dedicou á variedade Apementado:

Ano	m^2 Apementado	m^2 Convento	m^2 Negro	Produción total (kg)
2022	?	500	300	10.600

2. Unha das persoas traballadoras da cooperativa afirma que a superficie cultivada coa variedade Apementado hai tres anos non puido ser superior a 500 m^2 . Tendo en conta a información anterior, é esta afirmación completamente certa? Xustifica a resposta.
3. Unha traballadora da cooperativa lembra que hai outra persoa que traballou hai tres anos polo que deciden contactar con esta persoa, que lles informa de que naquel ano a variedade Apementado cultivárase nunha parcela ocupando 300 m^2 de superficie. Nese caso, cal é a produción de cada variedade (kg/m^2)?

Solución. Aquelas persoas interesadas en aprender sobre as variedades autóctonas de tomates poden consultar <http://www.ciam.gal/pdf/tomates.pdf>.

(1) Sexan x , y e z as producións, en kg/m^2 das variedades de tomate Apementado, Convento e Negro, respectivamente. Supoñamos que as producións dos dous últimos anos destas variedades de tomates fosen as mesmas. Tendo en conta a información fornecida na táboa, obtemos o seguinte sistema de ecuacións lineares

$$\begin{cases} 200x + 400y + 300z = 8.500, \\ 400x + 600y + 200z = 11.800, \end{cases} \quad (2.1)$$

que en forma matricial pode escribirse

$$\begin{pmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 600 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.500 \\ 11.800 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Este sistema de ecuacións debe ser compatíbel para que exista a posibilidade de que a produción nos dous últimos anos fose a mesma, que é o que estamos a supoñer desde un principio. En caso contrario, de ser incompatíbel, ao non ter solución, non cabería esta posibilidade.

Logo temos que comprobar que os rangos das matrices

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 600 & 200 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

e

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 200 & 400 & 300 & 8.500 \\ 400 & 600 & 200 & 11.800 \end{array} \right) \quad (2.4)$$

son iguais. Pero isto é evidente posto que o primeiro menor de orde 2 da matriz A ten rango dous, que é máximo. En virtude do teorema de Rouché-Frobenius, o sistema de ecuacións (2.1) é compatíbel. Este teorema coñécese como o teorema de Rouché-Capelli en territorios de fala inglesa, Italia e Brasil; como o teorema de Kronecker-Capelli en Austria, Polonia, Ucraína, Croacia, Romanía, Serbia e Rusia; como o teorema de Rouché-Fontené en Francia; ou simplemente como o teorema de Frobenius en República Checa e mais en Eslovaquia.

Aínda que non se pide no enunciado, podemos resolver o sistema de ecuacións (2.1) e obtemos

$$x = \frac{1}{2}(5z - 19), \quad y = 2(13 - z), \quad z \in \mathbf{R}. \quad (2.5)$$

Posto que as producións teñen que ser valores positivos, temos que

$$z \geq \frac{19}{5} = 3,8 \quad \text{e} \quad z \leq 13. \quad (2.6)$$

Por exemplo, se escollemos $z = 5$ entón resultan as seguintes producións nos dous anos:

$$x = 3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}, \quad y = 16 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}, \quad z = 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}. \quad (2.7)$$

(2) Se designamos con m a superficie cultivada da variedade Apementado no ano 2022, os datos referidos a este ano engaden unha terceira ecuación ao sistema de ecuacións (2.1), de xeito que obtemos

$$\begin{cases} 200x + 400y + 300z = 8.500, \\ 400x + 600y + 200z = 11.800, \\ mx + 500y + 300z = 10.600, \end{cases} \quad (2.8)$$

que en forma matricial pode escribirse

$$\begin{pmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 600 & 200 \\ m & 500 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.500 \\ 11.800 \\ 10.600 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Se consideramos a matriz

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 200 & 400 & 300 & 8.500 \\ 400 & 600 & 200 & 11.800 \\ m & 500 & 300 & 10.600 \end{array} \right) \quad (2.10)$$

temos que o seu rango é tres xa que o menor de orde tres

$$\begin{pmatrix} 400 & 300 & 8.500 \\ 600 & 200 & 11.800 \\ 500 & 300 & 10.600 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

ten determinante distinto de cero. Isto obriga a que o rango da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 600 & 200 \\ m & 500 & 300 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

sexa tamén igual a tres para que o sistema sexa compatíbel. Se calculamos o determinante de A obtemos

$$\det(A) = 28000000 - 100000m \quad (2.13)$$

de xeito que o rango de A será máximo (tres) cando $m \neq 280$. Para eses valores de m podemos resolver o sistema e obtemos

$$x = \frac{1.300}{5m - 1.400}, \quad y = \frac{92m - 26.800}{5m - 1.400}, \quad z = \frac{19m - 4.800}{5m - 1.400}, \quad (2.14)$$

sempre que $5m - 1.400 \neq 0$ ou equivalentemente sempre que $m \neq 280$. De considerarmos valores de m maiores que 500 poden resultar solucións positivas para as tres variábeis. Por exemplo, se $m = 600$ entón resulta

$$x = \frac{13}{16} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}, \quad y = \frac{71}{4} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}, \quad z = \frac{33}{8} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}. \quad (2.15)$$

Xa que logo, a afirmación non é completamente certa.

Outro xeito de resolver a cuestión é ter en conta respecto da afirmación «a superficie cultivada coa variedade Apementado hai tres anos non puido ser superior a 500 m^2 », non é completamente certa dado que non se está a descartar a posibilidade de que $m = 280$, o que daría lugar a que o sistema de ecuacións (2.8) fose incompatíbel, entrando en contradición coa existencia de solución.

(3) Finalmente, se $m = 300$ o sistema é compatíbel e determinado. Se o resolvemos resulta,

$$x = 13 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}, \quad y = 8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}, \quad z = 9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}, \quad (2.16)$$

o que significa que a produción de variedade Apementado é de $13 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$, a da variedade Convento é de $8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ e a da variedade Negro é de $9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$.

□

Tarefa 2.2. Tempo estimado para a resolución: 35 minutos. Para levar a cabo o cultivo e posterior recolección da variedade Convento, dispoñen dunha finca rectangular de 32 metros de ancho por 30 metros de longo. En principio queren realizar a plantación das tomateiras en fileiras de 1,50 metros de ancho, colocando fileiras ao longo dos 30 metros de longo que ten a finca, e deixando unha separación dun metro entre fileiras para poder acometer os traballos de coidado e mantemento (comézase colocando unha fileira). Antes de iniciar a plantación comentan, pola experiencia que teñen na cooperativa de cultivar esta variedade de tomate en anos anteriores, que o feito de reducir o ancho das fileiras para que as tomateiras dispoñan dunhas mellores condicións de desenvolvemento en canto ao ar, luz, espazo e recursos do chan, non fai variar a produción, que é de 8 kg/m^2 , pero o que si conseguen é que os tomates que se producen son dun maior calibre e, polo tanto, poderían vendelos a un prezo maior.

Deciden que para realizar a nova plantación deben ter en conta esta circunstancia a fin de conseguir atinxir os maiores ingresos posíbeis cun produto de maior calidade, sempre sen incrementar o número de fileiras para que «respiren» mellor e optimizar a luz e a auga, e axudar no consumo de produtos de proximidade tal e como se recollen nos estímulos 2.1 e 2.3.

Esta variedade de tomate comercialízana a un prezo de venda ao público de 2,70 €/kg. Tendo en conta o desenvolvemento desta variedade cando se cultiva, saben que por cada decímetro que se reduza o ancho dunha fileira, produciranse tomates dun calibre tal que lles permitirá subir o prezo de venda ao público en 0,30 €/kg.

1. Canto debe medir o ancho das fileiras para que os ingresos sexan os máximos posíbeis? A que prezo poderán vender os tomates apanados?
2. Na situación anterior, explica razoadamente como debe ser o deseño para a produción dos tomates da variedade Convento na finca da que dispoñen para tal fin, indicando o número de fileiras que poderán plantar, a superficie total cultivada, a produción e os ingresos que se esperan obter por fileira e a produción e os ingresos totais que se poderán conseguir.
3. Elabora un comentario cunha valoración persoal sobre se merecen a pena ou non as estratexias e planificacións de produción para lograr uns determinados obxectivos como a situación formulada.
4. Que sucedería se no lugar de manter constante o número de fileiras decidísemos empregar o espazo de redución para sementar máis fileiras de tomates?

Solución. Supoñamos que comezamos cunha fileira de tomates que ocupa 1,50 metros, despois ten que vir 1 metro de separación; despois novamente 1,50 metros para tomates, e logo outra vez un metro de separación. Deste xeito levamos xa 5 metros empregados, con dúas fileiras de tomates. Se repetimos isto 6 veces teremos empregados 30 metros (dos 32 metros da leira), con 12 fileiras de tomates cada unha de 30 m de lonxitude. Aínda temos espazo para unha décimo terceira fileira de tomates, e logo sobrarían 0,5 metros. [Cousas da vida](#), que titulou [Castelao](#). Temos xa que logo 13 fileiras de tomates, cada unha de 30 metros de lonxitude, o que nos dá un total de $13 \cdot 30 \cdot 1,5 = 585$ metros cadrados de tomates, dun total de 960 m^2 que mide o terreo. Posto que a produción é de 8 kg/m^2 temos unha produción total do terreo de 4.680 kg de tomate da variedade Convento. Inicialmente o prezo de venda ao público é de 2,70 €/kg, o que implica uns ingresos de 12.636 €.

Designemos con x ó número de decímetros de redución do ancho dunha fileira. Desta maneira, o seu ancho, en metros, vén dado pola expresión

$$1,50 - 0,10x. \quad (2.17)$$

Tendo en conta que unha fileira ten 30 metros de longo, abonda calcular o produto de ancho por longo para obter a expresión da súa superficie, o que nos leva a

$$(1,50 - 0,10x) \cdot 30. \quad (2.18)$$

Agora ben, posto que a produción da variedade de tomate Convento é de 8 kg/m^2 e non experimenta variacións con respecto da modificación do ancho dunha fileira, a produción total dunha destas virá dada polo produto da superficie pola produción por m^2 , é dicir, virá dada pola expresión

$$(1,50 - 0,10x) \cdot 30 \cdot 8. \quad (2.19)$$

Por outra banda, con respecto aos ingresos, tendo en conta que por cada decímetro que se reduza o ancho dunha fileira o prezo de venda ao público aumenta en 0,30 €/kg, a expresión que nos dá o prezo en €/kg é

$$2,70 + 0,30x. \quad (2.20)$$

Logo, os ingresos totais que se obteñen pola produción dunha fileira virán dados pola expresión que resulta do produto das dúas expresións anteriores, é dicir

$$(1,50 - 0,10x) \cdot 30 \cdot 8 \cdot (2,70 + 0,30x) \quad (2.21)$$

e os ingresos totais do terreo veñen dados por

$$I(x) = 13 \cdot (1,50 - 0,10x) \cdot 30 \cdot 8 \cdot (2,70 + 0,30x). \quad (2.22)$$

Certamente, ao calcular $I(0)$ obtemos de novo os ingresos iniciais de 12.636 €.

Entón, para resolver a cuestión relativa a maximizar os ingresos, temos que buscar os máximos da función definida por $I(x)$. Posto que

$$I'(x) = 13 \cdot (43,20 - 14,40 x) \quad (2.23)$$

temos que en $x = 3$ a función $I(x)$ presenta un posíbel extremo. Ademais, ao ser $I''(x) = -13 \cdot 14,40 < 0$, temos que nese punto hai un máximo relativo.

Isto significa que o ancho das fileiras debe reducirse en 3 decímetros. De xeito paralelo, increméntase o prezo de cada quilogramo de tomate en $3 \cdot 0,30 = 0,90$ € pasando a ser entón de $2,70 + 0,90 = 3,60$ €/kg. Se ben o número de fileiras é constante, é dicir 13 fileiras, non o é a superficie cultivada que agora é de $30 \cdot 1,20 \cdot 13 = 468$ m². Por fileira a produción é de $30 \cdot 1,20 \cdot 8 = 288$ quilos, que implican uns ingresos de $288 \cdot 3,60 = 1.036,80$ €. A produción total ascendería a 3.744 quilos de tomates e os ingresos pasarían a ser de

$$3.744 \text{ kg} \cdot 3,60 \frac{\text{€}}{\text{kg}} = 13.478,40 \text{ €}. \quad (2.24)$$

Isto supón un incremento absoluto de 842,40 €, ou se se prefire un incremento do 6,7 %.

Ao facer unha redución de 0,30 metros, no lugar de empregar fileiras de 1,50 metros temos fileiras de 1,20 metros. Deste xeito poderíamos aproveitar, deixando un metro de separación, para chegarmos a 15 fileiras de tomates, xa que $1,20 + 1 + 1,20 + 1 = 4,40$ metros e $4,40 \cdot 7 = 30,8$ metros, de xeito que xusto colle unha fileira máis para chegar aos 32 metros. A superficie que ocupa cada fileira é de $1,20 \cdot 30 = 36$ m², e a superficie cultivada aumentaría a $36 \cdot 15 = 540$ m². Cada fileira producirá $36 \cdot 8 = 288$ kg de tomates, obtendo unha produción total no cultivo de $288 \cdot 15 = 4320$ kg. Por último, no relativo aos ingresos, cada fileira permitirá ingresar $288 \cdot 3,60 = 1036,80$ euros, o que supón que os ingresos totais do cultivo ascenderían a $1036,80 \cdot 15 = 15.552$ €. Neste suposto, o incremento absoluto sería de 2.916 €, o que supón un incremento do 23,1 %.

□

Tarefa 2.3. Tempo estimado para a resolución: 25 minutos. Para loitar contra as pragas na produción de tomates, os traballadores e as traballadoras da cooperativa realizan os tratamentos con fitosanitarios ecolóxicos, empregando unha barra horizontal de pulverización que conta cunha serie de boquillas que apuntan en direccións paralelas contidas no mesmo plano. Para que a aplicación dos tratamentos sexa óptima e antes de levar a cabo estes, proceden a calibrar a barra de pulverización realizando unha serie de comprobacións. Cren que unha das boquillas se sae do plano de pulverización o que dificulta a óptima aplicación dos tratamentos e un mellor aproveitamento do produto fitosanitario empregado.

1. Segundo un determinado sistema de referencia ortonormal, o plano de pulverización vén dado pola ecuación

$$\pi : x - z = 0. \quad (2.25)$$

Por outra banda, a dirección da boquilla que queren comprobar vén dada pola ecuación

$$r : x - 2 = \frac{y + 1}{-4} = z - 2. \quad (2.26)$$

Está ben orientada a boquilla? Xustifica a túa resposta.

Unha vez comprobado que todo está correcto e que a barra de pulverización está ben calibrada, queren engadir dúas novas boquillas co obxectivo de reducir o tempo de aplicación dos tratamentos.

2. Cada unha destas boquillas debe ir a 2 decímetros de distancia dunha boquilla determinada, cuxa dirección de aplicación vén dada pola ecuación

$$s : x - 1 = -\frac{y}{4} = z - 1. \quad (2.27)$$

Cales son as direccións destas dúas novas boquillas?

Solución. (1) Queremos determinar se a boquilla está ben orientada equivale a comprobar se a recta r que define a súa dirección está contida no plano de pulverización π . Para iso, basta comprobar se o plano contén un punto da recta, e se un vector director da recta é ortogonal a un vector normal ao plano. Da ecuación da recta r definida na ecuación (2.26)

podemos escoller o punto $A_r(2, -1, 2)$ e vector

$$\vec{v}_r = (1, -4, 1). \quad (2.28)$$

Consideramos o vector normal ao plano de pulverización (2.25)

$$\vec{n}_\pi = (1, 0, -1). \quad (2.29)$$

En primeiro lugar é simple comprobar que, efectivamente, o punto A_r está contido no plano π posto que se substituímos as coordenadas de A_r na ecuación do plano π obtemos unha identidade:

$$2 - 2 = 0. \quad (2.30)$$

Por outra banda, se calculamos o produto escalar dos vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{n}_\pi$ resulta

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1, -4, 1) \cdot (1, 0, -1) = 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 1 + 0 - 1 = 0, \quad (2.31)$$

o que significa que os dous vectores son ortogonais.

(2) Para determinar as direccións das novas boquillas primeiro calcularemos o plano α que é perpendicular ao plano π e que contén á recta s . Os dous planos paralelos a α que se atopen a dous decímetros de distancia cortarán ao plano π nas direccións pedidas.

O plano α queda determinado a partir dun punto da recta s , p. ex. $A_s(1, 0, 1)$, dun vector director desta recta, p. ex. $\vec{v}_s = (1, -4, 1)$, e dun vector normal ao plano π , p. ex. $\vec{n}_\pi = (1, 0, -1)$. Con estes tres ingredientes a ecuación do plano α vén dada pola ecuación

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.32)$$

é dicir

$$4x + 2y + 4z - 8 = 0, \quad (2.33)$$

ou equivalentemente

$$\alpha : 2x + y + 2z - 4 = 0. \quad (2.34)$$

Deste xeito, os dous planos paralelos a α que estamos a buscar teñen por ecuación

$$\beta : 2x + y + 2z + k = 0, \quad (2.35)$$

onde k é un número real. Para determinar estes dous planos chega con impoñer a condición de que a distancia de β a α debe ser de dous decímetros. Escollendo un punto do plano α , por exemplo $A_s(1, 0, 1)$, formulamos a igualdade

$$d(A_s, \beta) = 2, \quad (2.36)$$

que equivale a

$$\frac{|2 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 1 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 2, \quad (2.37)$$

é dicir

$$|k + 4| = 6. \quad (2.38)$$

Se resolvemos a ecuación anterior obtemos as solucións $k = 2$ e $k = -10$ polo que obtemos os dous planos

$$\beta_1 = 2x + y + 2z + 2 = 0, \quad \beta_2 = 2x + y + 2z - 10 = 0. \quad (2.39)$$

Polo tanto, as direccións das novas boquillas veñen determinadas polas ecuacións

$$s_1 : \begin{cases} x - z = 0, \\ 2x + y + 2z + 2 = 0, \end{cases} \quad s_2 : \begin{cases} x - z = 0, \\ 2x + y + 2z - 10 = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Podemos expresar estas ecuacións doutro xeito escollendo un punto en cada unha delas

$$A_{s_1}(0, -2, 0), \quad A_{s_2}(0, 10, 0), \quad (2.41)$$

e tomando como vector director $\vec{v}_s = (1, -4, 1)$ obtemos

$$s_1 : x = \frac{y + 2}{-4} = z, \quad s_2 : x = \frac{y - 10}{-4} = z. \quad (2.42)$$

□

Tarefa 2.4. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. Chegou o momento de realizar a colleita dos tomates. Despois da recolección observaron que un de cada oito tomates tiña un calibre inferior ao desexado (inferior a 80 mm de diámetro), aínda que a idea é a de comercializalos igualmente no medio dos outros. Para isto, na planta de procesado realizan o envasado en dous formatos: caixas pequenas de 12 unidades destinadas ao pequeno comercio, e lotes de 100 unidades destinados ao comercio por xunto.

Para etiquetar os envases, seguen o criterio de colocar unha etiqueta coa inscrición «Calidade superior» cando os tomates de calibre inferior a 80 mm de diámetro non cheguen ao 10 % dos tomates do envase. No caso de que os tomates de calibre inferior a 80 mm de diámetro superen ou igualem o 10 % e cheguen como moito ao 20 %, entón colocarán unha etiqueta coa inscrición «Calidade extra».

1. Para as caixas de 12 unidades, cal é a porcentaxe delas que levan a etiqueta «Calidade superior»?
2. A cooperativa recibe o encargo dunha persoa que ten un posto de venda nunha praza de abastos que merca seis caixas de 12 unidades. Cantas se espera que levan a etiqueta «Calidade superior»?
3. De escollermos un lote de 100 unidades ao chou, con que probabilidade levarán a etiqueta «Calidade extra»?
4. Un supermercado encárgalle á cooperativa oito lotes de 100 unidades. Cal é a probabilidade de que os oito levan a etiqueta «Calidade extra»?

Solución. (1) Definamos a variábel aleatoria

$$X = \text{número de tomates de calibre inferior a 80 mm de diámetro.} \quad (2.43)$$

Esta variábel aleatoria segue unha distribución binomial de parámetros $n = 12$ e $p = 1/8$

$$X \sim B(12; 1/8). \quad (2.44)$$

Segundo o criterio da cooperativa, tendo en conta que o 10 % de 12 é igual a 1,20, a caixa levará a etiqueta «Calidade superior» se os tomates de calibre inferior a 80 mm de

diámetro é un como moito. Logo a probabilidade pedida virá dada por

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{12}{0} \left(\frac{1}{8}\right)^0 \left(\frac{7}{8}\right)^{12} + \binom{12}{1} \left(\frac{1}{8}\right)^1 \left(\frac{7}{8}\right)^{11} \\ &= 0,2014 + 0,3453 = 0,5467. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Polo tanto, a porcentaxe de caixas que levan a etiqueta «Calidade superior» é do 54,67 %.

(2) Neste caso temos que definir unha nova variábel aleatoria

$$Y = \text{número de caixas de 12 unidades que levan a etiqueta «Calidade superior»,} \quad (2.46)$$

que segue unha distribución binomial de parámetros $n = 6$ e $p = 0,5467$,

$$Y \sim B(6; 0,5467). \quad (2.47)$$

Posto que

$$E[Y] = np = 6 \cdot 0,5467 = 3,2802, \quad (2.48)$$

o número esperado de caixas que levan a etiqueta «Calidade superior» é igual a 3,28.

(3) Dado que agora escollemos un lote de 100 unidades ao chou, a distribución binomial definida pola variábel aleatoria X pasa a ter por parámetros $n = 100$ e $p = 1/8$

$$X \sim B(100; 1/8). \quad (2.49)$$

Designemos con X' a variábel aleatoria que segue unha distribución normal $N(\mu; \sigma)$ onde

$$\mu = np = 100 \cdot \frac{1}{8} = 12,50, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 3,31, \quad (2.50)$$

posto que

$$n = 100 \geq 30, \quad np = 12,50 > 5, \quad nq = n(1 - p) = 87,50 > 5. \quad (2.51)$$

Tendo en conta o criterio empregado para etiquetar os envases, xa que ten que haber máis que ou igual ao 10 % e como moito un 20 % de tomates de calibre inferior a 80 mm de diámetro para que o lote de 100 unidades leve a etiqueta «Calidade extra», o número de tomates do lote ten que estar comprendido entre 10 e 20. Polo tanto, a probabilidade pedida agora é

$$P(10 \leq X \leq 20). \quad (2.52)$$

Utilizando a corrección de Yates (ou do punto medio) obtemos

$$P(10 \leq X \leq 20) \approx P(9,5 \leq X' < 20,50), \quad (2.53)$$

e tipificando a unha distribución normal $Z = N(0; 1)$ chegamos a

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 20) &\approx P(9,5 \leq X' < 20,50) \\ &= P\left(\frac{9,5 - 12,50}{3,31} \leq Z < \frac{20,5 - 12,50}{3,31}\right) = P(-0,91 \leq Z < 2,42). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Por último, utilizando a simetría da distribución normal e empregando as súas táboas de valores

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 20) &\approx P(9,5 \leq X' < 20,50) \\ &= P\left(\frac{9,5-12,50}{3,31} \leq Z < \frac{20,5-12,50}{3,31}\right) = P(-0,91 \leq Z < 2,42) \\ &= P(Z < 2,42) - (1 - P(Z \leq 0,91)) = 0,9922 - (1 - 0,8186) = 0,8108. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Polo tanto, a probabilidade de que o lote de 100 unidades leve a etiqueta «Calidade extra» é do 81,08 %.

(4) Definimos unha nova variábel aleatoria

$$T = \text{número de lotes de 100 unidades que levan a etiqueta «Calidade extra»}. \quad (2.56)$$

Esta variábel aleatoria segue unha distribución binomial de parámetros $n = 8$ e $p = 0,8108$

$$T \sim B(8; 0,8108). \quad (2.57)$$

Para dar resposta á cuestión que se formula debemos calcular $P(T = 8)$. Empregando a función de distribución resulta

$$P(T = 8) = \binom{8}{8} (0,8108)^8 (0,1892)^0 = 0,1868, \quad (2.58)$$

de onde a probabilidade de que os oito lotes levan a etiqueta «Calidade extra» é do 18,68 %.

□

Tarefa extra 2.1. Constrúe un texto sobre a importancia da agricultura ecolóxica en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 2.2. Na praza de abastos dunha vila galega hai un posto de venda que comercializa tomates da variedade Negro cultivados pola cooperativa HORECOGAL S.L. A pesar de que as opinións sobre este produto realizadas pola súa clientela son favorábeis nun 81 %, motivo polo cal goza dunha boa fama, as persoas encargadas deste posto terán que tomar a decisión de volver a comercializalo ou non. Farano se polo menos tres de cada catro dos seus clientes mercaron o produto.

Pola información da que dispoñen no trato do día a día coa súa clientela, de entre as persoas que mercaron esta variedade de tomate, estiman que un 85 % deron unha opinión favorábel, mentres que un 6 % dérona desfavorábel, resultándolle indiferente ao resto da clientela.

Pero tamén houbo opinións por parte da clientela que non mercou este produto: un 65 % ofreceu unha opinión favorábel, valorando a súa calidade, aínda que finalmente non se decidiron a mercalo. Por outra banda, resultoulle indiferente a un 30 %. E o resto, deu unha opinión desfavorábel.

1. Tendo en conta a información anterior, cal cres que será a decisión das persoas encargadas deste posto de venda? Comercializarán de novo tomates da variedade Negro ou non? Xustifica a resposta explicando o razoamento seguido.
2. Se sabemos que unha das clientas deu unha opinión desfavorábel do produto, cal é a probabilidade de que o mercase? Escribe unha valoración persoal sobre se é lexítimo ou non realizar valoracións ou opinións sobre cousas das que non se ten coñecemento.
3. Consideras que son independentes o feito de dar unha opinión favorábel e ter mercado o produto? Xustifica a resposta.
4. Se imos ao posto comprar tomates da variedade Negro e vemos que temos a nove persoas diante para seren atendidos, cantos se espera que ofrecerán unha opinión indiferente sobre o produto? Cal é a probabilidade de que polo menos unha o fixese?

Solución. En primeiro lugar definimos os seguintes sucesos que se empregarán durante a resolución desta tarefa:

1. M : mercar o produto.
2. F : dar unha opinión favorábel.
3. D : dar unha opinión desfavorábel.
4. I : resultar indiferente.

(1) Para determinar cal é a decisión que tomarán as persoas encargadas do posto de venda, debemos calcular a probabilidade do suceso M e comparar o seu valor con $\frac{3}{4}$.

Para isto, tendo en conta que M e máis o seu suceso contrario, $\bar{M}$, determinan un sistema completo de sucesos, utilizando o teorema das probabilidades totais obtemos a igualdade

$$P(F) = P(F|M) \cdot P(M) + P(F|\bar{M}) \cdot P(\bar{M}), \quad (2.59)$$

onde os valores das probabilidades $P(F)$, $P(F|M)$ e $P(F|\bar{M})$ son valores coñecidos pois forman parte da información proporcionada nesta tarefa:

$$P(F) = \frac{81}{100}, \quad P(F|M) = \frac{85}{100}, \quad P(F|\bar{M}) = \frac{65}{100}. \quad (2.60)$$

Desta maneira, e posto que $P(\bar{M}) = 1 - P(M)$ a igualdade (2.59) redúcese a

$$\frac{81}{100} = \frac{85}{100}P(M) + \frac{65}{100}(1 - P(M)), \quad (2.61)$$

ou de xeito equivalente

$$81 = 85P(M) + 65(1 - P(M)), \quad (2.62)$$

de onde podemos resolver o valor de $P(M)$ obtendo

$$P(M) = \frac{4}{5}. \quad (2.63)$$

Polo tanto, xa que $P(M) > 3/4$, a decisión deberá ser a de comercializar de novo tomates da variedade Negro.

(2) Neste caso temos que calcular a probabilidade $P(M|D)$, cuxo valor podemos obter empregando o teorema de Bayes:

$$P(M|D) = \frac{P(D|M) \cdot P(M)}{P(D)}. \quad (2.64)$$

Por outra banda, empregando novamente o teorema das probabilidades totais resulta

$$P(D) = P(D|M) \cdot P(M) + P(D|\bar{M}) \cdot P(\bar{M}) \quad (2.65)$$

onde o valor da probabilidade $P(D|M)$ forma parte da información facilitada,

$$P(D|M) = \frac{6}{100}, \quad (2.66)$$

e a probabilidade $P(D|\bar{M})$ pode calcularse moi facilmente a partir da información dada tendo en conta que os sucesos F , D e I forman un sistema completo de sucesos:

$$P(D|\bar{M}) = 1 - (P(F|\bar{M}) + P(I|\bar{M})) = 1 - \left(\frac{65}{100} + \frac{30}{100}\right) = \frac{5}{100}. \quad (2.67)$$

Ademais, posto que

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}, \quad (2.68)$$

retomando a igualdade (2.65) obtemos

$$P(D) = P(D|M) \cdot P(M) + P(D|\bar{M}) \cdot P(\bar{M}) = \frac{6}{100} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{5} = \frac{29}{500}. \quad (2.69)$$

Xa que logo, se agora retomamos a igualdade (2.64)

$$P(M|D) = \frac{P(D|M) \cdot P(M)}{P(D)} = \frac{\frac{6}{100} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{29}{500}} = \frac{24}{29}, \quad (2.70)$$

o que equivale a unha porcentaxe aproximada dun 82,76 %.

(3) Para dar unha resposta xustificada a esta cuestión, debemos estudar a independencia dos sucesos F e M . Serán independentes se, por exemplo, o valor de $P(F|M)$ coincide co valor de $P(F)$, o cal non é certo posto que, da información proporcionada nesta tarefa temos

$$P(F|M) = \frac{85}{100} \neq \frac{81}{100} = P(F). \quad (2.71)$$

Logo, dar unha opinión favorábel depende do feito de mercar os tomates da variedade Negro.

Outra forma de xustificar este feito sería comprobando que o valor da probabilidade $P(F \cap M)$ non coincide co valor do produto $P(F) \cdot P(M)$, o cal tamén é evidente posto que, por unha parte,

$$P(F \cap M) = P(F|M) \cdot P(M) = \frac{85}{100} \cdot \frac{4}{5} = \frac{17}{25}, \quad (2.72)$$

e por outra

$$P(F) \cdot P(M) = \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{125}, \quad (2.73)$$

valores que non coinciden.

(4) Consideramos unha nova variábel aleatoria definida por

$$X = \text{número de clientes que ofrecerán unha opinión indiferente.} \quad (2.74)$$

Esta nova variábel segue unha distribución binomial de parámetros $n = 10$ (somos 10 clientes para sermos atendidos no posto de venda) e $p = P(I)$, onde o valor desta probabilidade podemos obtelo a partir do teorema das probabilidades totais

$$P(I) = P(I|M) \cdot P(M) + P(I|\bar{M}) \cdot P(\bar{M}), \quad (2.75)$$

ou ben, máis facilmente, tendo en conta que os sucesos F , D e I forman un sistema completo de sucesos:

$$P(I) = 1 - (P(F) + P(D)) = 1 - \left(\frac{81}{100} + \frac{29}{500} \right) = \frac{33}{250} \approx 0,13. \quad (2.76)$$

En consecuencia, o valor esperado virá dado por

$$E[X] = n \cdot p = 10 \cdot 0,13 = 1,3, \quad (2.77)$$

o que significa que se espera que un dos dez clientes ofrecerá unha opinión indiferente sobre os tomates da variedade Negro.

Respecto da segunda cuestión que se formula, está claro que debemos calcular o valor da probabilidade $P(X \geq 1)$. Empregando a función de distribución dunha distribución binomial $B(10;0,13)$ obtemos

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0,13^0 0,87^{10} = 1 - 0,2484 = 0,7516, \quad (2.78)$$

é dicir, que existe unha probabilidade dun 75,16 % de que polo menos un dos clientes ofrecerá unha opinión indiferente.

□

Tarefa extra 2.3. Despois da colleita cómpre empacar os tomates recollidos en bolsas ecolóxicas reutilizábeis. No caso do tomate da variedade Apementado, para evitar estragarse, non poden pesar en conxunto máis dun quilo. A distribución do peso en gramos segue unha distribución normal, e sábese que o peso medio do ano pasado foi de 270 gramos por unidade, algo superior ao que se recollía no ano 2015 polo [Centro de Investigacións Agrarias de Mabegondo](#) e moitísimo máis do que se dá noutros territorios baixo o nome de [Andine Cornue](#) (o nome científico é *Solanum lycopersicum*). Tamén se sabe que o 10 % dos tomates da clase Apementado máis grandes tiveron un peso mínimo de 282,8 gramos. Na cadea de embalaxe nun primeiro momento destínanse a salsa de tomate os tomates que pesan menos de 253,6 gramos, e os tomates restantes divídense en 3 tamaños: tomates pequenos, medianos e grandes.

1. Determina os pesos de cada grupo de tomates se queremos o mesmo número de tomates por grupo. Unha tenda local de alimentos selectos, quere abrir unha liña de negocio por internet, e precisa saber a porcentaxe de tomates da que podería dispor dun tamaño extragrande (determinado por un peso mínimo de 290 gramos).
2. Para a planificación da recollida cómpre saber o tempo medio de maduración. Por anos pasados, e se a meteoroloxía é semellante, sábese que o tempo T en días dende que unha flor se abre e se poliniza ata que madura o tomate é unha variábel continua con función de densidade:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 30, \\ \lambda e^{-\lambda(t-30)}, & t > 30, \end{cases} \quad (2.79)$$

onde o parámetro λ depende da variedade de tomate. Se $\lambda = 0,075$ temos a variedade Apementado. Cal é o tempo medio de maduración desta variedade?

3. Dado que as persoas da cooperativa prefiren traballar con números enteiros (1 día, 2 días, 3 días, ...) determina a distribución de probabilidade^a da variábel discreta $[T]$, onde $[x]$ representa parte enteira do número x , é dicir, $[\pi] = 3$.
4. Xustifica a adecuación ou non da función de densidade indicada para o tempo de maduración.

^aFunción de masa de probabilidade: valores que pode dar a variábel e a probabilidade de cada un deles.

Solución. (1) En primeiro lugar debemos determinar a desviación típica da variábel

$$X = \text{Peso en gramos dun tomate Apementado} \sim N(\mu = 270; \sigma). \quad (2.80)$$

Posto que

$$P(X \geq 282,8) = 0,10, \quad P(X < 282,8) = 0,90 \quad (2.81)$$

tipificando ($Z \sim N(0; 1)$):

$$P\left(\frac{X - 270}{\sigma} < \frac{282,8 - 270}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{282,8 - 270}{\sigma}\right) = 0,90. \quad (2.82)$$

Da táboa da distribución normal $N(0; 1)$ temos que

$$P(Z < 1,28) = 0,90 \quad (2.83)$$

(redondeando a 2 decimais), de onde deducimos que

$$\frac{282,8 - 270}{\sigma} = 1,28 \quad (2.84)$$

polo que resulta un valor de $\sigma = 10$ gramos.

Agora debemos obter a porcentaxe de tomates non destinados a salsa para determinar os puntos de corte que van delimitar os rangos de clasificación de tomate pequeno, mediano e grande.

$$\begin{aligned} P(X < 253,6) &= P\left(\frac{X - 270}{\sigma} < \frac{253,6 - 270}{10}\right) \\ &= P(Z < -1,64) = 1 - P(Z \leq 1,64) = 1 - 0,9495 = 0,0505. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Se asignamos como intervalos

$$(-\infty, 253,6), \quad [253,6, t_1), \quad [t_1, t_2), \quad [t_2, +\infty), \quad (2.86)$$

temos que

$$P(X < 253,6) = 0,0505, \quad P(X < t_1) = 0,0505 + \frac{0,9495}{3} = 0,3670, \quad (2.87)$$

$$P(X < t_2) = 0,0505 + \frac{2 \cdot 0,9495}{3} = 0,6835 \quad (2.88)$$

Podemos entón calcular o valor de t_1 que se obtén da táboa (despois de tipificar) ao termos en conta que

$$P\left(Z < -\frac{t_1 - 270}{10}\right) = 1 - 0,3670 = 0,6330, \quad (2.89)$$

é dicir,

$$-\frac{t_1 - 270}{10} = 0,34, \quad t_1 = 270 - 0,34 \cdot 10 = 266,6 \text{ gramos.} \quad (2.90)$$

Analogamente para t_2 :

$$P(X < t_2) = P\left(Z < \frac{t_2 - 270}{10}\right) = 0,6835, \quad (2.91)$$

é dicir,

$$\frac{t_2 - 270}{10} = 0,48, \quad t_2 = 270 + 0,48 \cdot 10 = 274,8 \text{ gramos.} \quad (2.92)$$

Posto que os tomates teñen peso positivo, e os de menos de 253,6 gramos van para salsa de tomate, temos os seguintes intervalos:

$$(0, 253,6), \quad [253,6, 266,6), \quad [266,6, 274,8), \quad [274,8, +\infty). \quad (2.93)$$

A porcentaxe de tomates da variedade Apementado de tamaño extragrande vén dada por:

$$\begin{aligned} P(X \geq 290) &= P\left(\frac{X - 270}{10} \geq \frac{290 - 270}{10}\right) = P(Z \geq 2,00) \\ &= 1 - P(Z < 2,00) = 1 - 0,9772, \end{aligned} \quad (2.94)$$

é dicir, é do 2,28 %.

(2) Primeiramente realizamos un cambio de variábel, definindo $\tilde{T} = T - 30$, de xeito que a función de densidade vén dada por:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.95)$$

Calculamos agora

$$\begin{aligned} E(T) &= E(\tilde{T}) + 30 = 30 + \int_{\mathbf{R}} t \tilde{f}(t) dt \\ &= 30 + \int_{-\infty}^0 t \cdot 0 dt + \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = 30 + 0 + \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Aplicando integración por partes con $u = t$ e $dv = \lambda e^{-\lambda t} dt$ e polo tanto, $du = dt$ e $v = -e^{-\lambda t}$

$$E(T) = 30 - t e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda t} dt = 30 - t e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} = 30 + \frac{1}{\lambda} \quad (2.97)$$

Para un valor de $\lambda = 0,075$ o tempo medio de maduración é de

$$\frac{1}{0,075} + 30 = 43,33 \text{ días.} \quad (2.98)$$

(3) Consideramos a variábel

$$D = [T] = \text{tempo en días de maduración.} \quad (2.99)$$

Dado que a función de densidade toma valores positivos a partir do 30, a variábel D tamén. Ademais,

$$\begin{aligned} D = [t] = 30, & \quad t \in (30, 31), \\ D = [t] = 31, & \quad t \in [31, 32), \\ D = [t] = 32, & \quad t \in [32, 33), \\ \vdots & \quad \vdots \\ D = [t] = i, & \quad t \in [i, i+1), \\ \vdots & \quad \vdots \end{aligned} \quad (2.100)$$

Polo tanto, verifícase que a variábel D toma enteiros maiores ou iguais a 30, cunha probabilidade de:

$$\begin{aligned} P(D = i) &= P([T] = i) = P([\tilde{T}] = i - 30) = \int_{i-30}^{i-29} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_{i-30}^{i-29} \\ &= e^{-\lambda(i-30)} - e^{-\lambda(i-29)} = e^{-\lambda(i-30)} (1 - e^{-\lambda}). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Para os 10 primeiros valores temos as seguintes probabilidades para $\lambda = 0,075$:

D	$P(D = i)$
30	0,0723
31	0,0670
32	0,0622
33	0,0577
34	0,0535
35	0,0497
36	0,0461
37	0,0427
38	0,0397
39	0,0368

(4) Podemos observar que a función de densidade toma valores continuos no intervalo $(30, \infty)$ con decrecemento exponencial dependendo do parámetro λ . Canto maior é o valor do parámetro, máis pequena é a media e menor variabilidade. Menor valor implica media máis grande e maior variabilidade. Sobre a forma da curva, indica que a maduración dos tomates prodúcese con alta probabilidade para valores próximos á media, destacando maior probabilidade para valores menores da media (fronte a valores maiores da media) e que uns poucos terán maduración tardía, o cal se xustifica debido a que ao final do verán as temperaturas son máis baixas.

Sobre a non adecuación da densidade, indicar que, a variábel pode tomar valores maiores que 30, ata o $+\infty$, caso que non se dá na realidade. Destacar, que a pesar desta inadecuación ao problema real, a probabilidade de que isto ocorra é desprezábel, causada polo decaemento exponencial da curva.

□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois, ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado, o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (*Influencers*) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.

Vivenda

Situación de aprendizaxe 3. O artigo 47 da [Constitución](#) de 1978 recolle que «Todos os españois teñen dereito a gozar dunha vivenda digna e axeitada». Engade ademais, que «os poderes públicos promoverán as condición necesarias e establecerán as normas pertinentes para faceren efectivo este dereito, regulando a utilización do solo de acordo co interese xeral para que se impida a especulación».

Pero o certo é que a vivenda converteuse nun dos problemas que máis preocupa á cidadanía (o segundo entre as persoas menores de 35 anos, segundo o [CIS](#)). A falta de vivendas a un prezo accesíbel é unha das causas que impide a emancipación da xente nova, a pesar de ter traballo.

O obxectivo desta situación de aprendizaxe é reflexionar sobre distintas problemáticas relacionadas coa vivenda. Como reto final debe evidenciarse un produto final: construción dun texto, a partir da resolución das distintas tarefas e cos estímulos presentados, para facer unha proposta de resolución do problema da vivenda para a xente moza.

Imaxe de fondo obtida de <https://www.freepik.com>

Affordable
Housing

Estímulo 3.1: O paradoxo da Vivenda: necesidade versus especulación.

O debate sobre a vivenda sempre estivo marcado por unha tensión constante entre a intervención do sector público e a libre operación do mercado inmobiliario. Este dilema está presente dende hai décadas e intensificouse nun contexto onde as crises económicas deixaron parte da cidadanía en situación de vulnerabilidade. Por iso, a relación entre o dereito á vivenda e os intereses especulativos provoca un panorama complexo, que require dunha análise profunda e dun enfoque renovado e disruptivo.

O artigo 47 da Constitución de 1978 establece un dereito fundamental: «Todos os españois teñen dereito a disfrutar dunha vivenda digna e adecuada. Os poderes públicos promoverán as condicións necesarias e establecerán as normas pertinentes para facer efectivo este dereito, regulando a utilización do solo de acordo co interese xeral para impedir a especulación».

Esta declaración non só representa un compromiso social, senón que lles impón unha clara responsabilidade aos poderes públicos para crearen as condicións necesarias que garantan este dereito. Non obstante, a realidade demostrou ser moi diferente. A especulación domina o sector inmobiliario e eclipsa as febles políticas públicas necesarias para lograr unha vivenda accesible e digna para todas as persoas.

A especulación inmobiliaria conduce ás familias a destinar máis do 50 % dos seus ingresos ao acceso a unha vivenda. é unha cifra alarmante que contrasta drasticamente co 20 ou 25 %, que se observa noutras economías europeas. Este fenómeno xera, ademais, un impacto devastador na estabilidade económica dos fogares, ao deixalos atrapados nunha espiral de endebedamento que complica aínda máis a súa calidade de vida. A carga económica da vivenda contribuíu ao aumento da desigualdade social e atinxiu principalmente aos grupos máis vulnerables.

Esta nova crise inmobiliaria está marcada polos incrementos nos prezos do acceso á vivenda, que non concordan coas subas dos salarios. ábrese, pois, un novo horizonte que podería permitirnos reformular este paradoxo, xa que as prácticas económicas no ámbito inmobiliario construíron un modelo totalmente anómalo, a resultados do cal se produce unha falta de oferta alcanzable para a meirande parte da poboación.

Ademais, o desenvolvemento e a transformación urbana, no canto de contribuíren a unha oferta de vivenda equilibrada consonte coa capacidade económica da poboación, provocan unha distorsión dos prezos e, polo tanto, unha crecente desconexión entre a calidade das vivendas e os niveis de renda da cidadanía. Créanse, así, contornas onde a procura de beneficios económicos a curto prazo prima sobre a necesidade dun desenvolvemento urbano sostible e accesible. Incrementábase, paradoxalmente, a oferta de vivendas de luxo de alto custo en certas cidades, mentres que as opcións asequibles e de calidade se volven cada vez máis escasas.

Este modelo anómalo provoca, evidentemente, graves desigualdades sociais, porque as familias de baixos e medianos ingresos se ven forzadas a destinaren unha porcentaxe desproporcionada dos seus ingresos a adquirir un espazo onde poder habitar. Limitase, deste xeito, a súa capacidade para cubrir outras necesidades básicas, como poden ser a alimentación, a educación, a saúde, ou o ocio. Provoca, xa que logo, unha fragmentación social.

Este modelo anómalo, en lugar de ofrecer opcións que se axusten aos ingresos da maioría da poboación, prioriza a rendibilidade sobre a accesibilidade. Incrementa o endebedamento das persoas e xera un sentimento de frustración e de desconfianza cara ás institucións e cara ao propio sistema. Daquela, é preciso rematar con anos de especulación e construír un medio urbano máis equitativo e accesible para todas as persoas con enfoques innovadores e disruptivos que promovan unha visión máis xusta e sostible da vivenda. A transformación do sector debe centrarse no benestar da cidadanía e priorizar o acceso a unha vivenda asequible como un dereito fundamental, tal e como recolle a propia Constitución.

Para iso, cómpre fomentar, entre outras liñas de acción, unha maior oferta de vivenda pública en alugueiro; unha maior colaboración co sector privado non especulativo, como son as cooperativas; así como, outras novas iniciativas que procuren o benestar social en lugar do lucro. Requírese, ademais, unha mellora significativa na eficiencia da administración pública na xestión do solo e mais nos procesos de rehabilitación de vivendas existentes. A recuperación e a reciclaxe de edificacións deben ser tamén unha prioridade, para contribuír non só á sustentabilidade do medio urbano e rural, senón tamén como fórmula de recuperación e posta en valor do patrimonio arquitectónico.

é fundamental, ademais, que as políticas de vivenda do século XXI se proxecten con base en criterios de sustentabilidade, isto é, de eficiencia enerxética. O sector da construción é o responsable de arredor do 35 % das emisións de CO₂ en Europa, o que subliña a necesidade dunha transformación profunda deste sector.

O novo paradigma debe adoptar prácticas construtivas sostibles, co uso de materiais ecoeficientes, que son cruciais para reducir o impacto ambiental e para fomentar un desenvolvemento responsable. é tamén esencial que as vivendas se adapten aos novos modos de vida e de traballo, que a tecnoloxía nos permite hoxe en día, así como ás transformacións na estrutura familiar, que é máis diversa e complexa.

A rehabilitación debe converterse nun dos vectores principais das políticas de vivenda. Non só se trata de mellorar a calidade das edificacións existentes, senón tamén de revitalizar comunidades enteiras, co fomento da cohesión social e coa mellora da calidade de vida de quen as habita. A rehabilitación pode contribuír á rexeneración urbana, ao transformar espazos degradados en contornas habitables e agradables.

Trátase tamén de ir máis aló do simple acceso ao espazo privativo da vivenda, pois o enfoque debe ser máis holístico e considerar o benestar da sociedade no seu conxunto. Así mesmo, a relación que a vivenda privada estableza co territorio que habita deberá ser tamén de moita calidade, co fin de xerar espazos colectivos e de interacción. Este concepto implica unha transformación profunda na maneira en que entendemos e abordamos o desenvolvemento urbano e a edificación. A habitabilidade debe incluír, así mesmo, outros factores, como a accesibilidade ao transporte público, a proximidade de parques e espazos verdes ou a dispoñibilidade de servizos, como educación, saúde ou comercio.

Débase facer tamén unha reflexión diferente sobre como usamos e definimos o territorio. Iso implica recoñecer a interconexión entre os espazos construídos e os espazos naturais. Daquela, os novos modelos das políticas de vivenda deben ter en conta a planificación territorial, para fomentar a conservación da biodiversidade e dos ecosistemas e para promover, así, unha relación harmónica entre o ser humano e o seu medio. Isto inclúe a creación de corredores verdes, a preservación de áreas naturais ou a implementación de prácticas que fomenten a agricultura urbana.

En resumo, este enfoque disruptivo implica un cambio absoluto de paradigma na forma en que concibimos o desenvolvemento urbano e a edificación, xa que non se trata só de construír vivendas, senón de crearmos contornas que promovan a sustentabilidade medioambiental e a cohesión social.

Preséntase fronte a nós unha oportunidade histórica para reverter o dano inflixido á economía da cidadanía e para poñer fin á especulación no sector inmobiliario. A gobernanza debe ser capaz de xerar propostas avanzadas que consideren os límites ecolóxicos e que promovan un modelo urbanístico renovado.

é hora de repensar a nosa relación coa vivenda, e de lembrarmos que esta é máis que un simple ben económico, é un dereito fundamental que debe ser garantido polo Estado.

Reinventar o futuro da vivenda implica un compromiso colectivo para construír unha contorna máis xusta, sostible e accesible para todas as persoas. O que significa, que debemos abordar a crise da vivenda, non só desde unha perspectiva económica, senón tamén debemos considerar as súas implicacións sociais, culturais e medioambientais. Cómpre ter en conta tamén a participación da cidadanía na toma de decisións sobre políticas de vivenda, pois é esencial para garantir que as solucións adoptadas responden ás necesidades reais da poboación.

A vivenda debe ser entendida como un elemento central na construción de sociedades máis equitativas e sostíbles. As políticas deben priorizar o acceso á vivenda, na consideración de que esta é un ben de uso e non de consumo. Non só mellorará a calidade de vida da cidadanía, senón que tamén contribuirá ao desenvolvemento dun medio urbano que respecte o benestar social e a saúde do planeta. É o momento de actuar con determinación e responsabilidade, e de asegurar que o dereito á vivenda se convirta nunha realidade.

Texto de **Teresa Táboas Veleiro**, doutora arquitecta. Vicepresidenta R1 do Consello da [Unión Internacional de Arquitectos \(UIA\)](#).

Estímulo 3.2: Viñeta de [Xosé Lois González Vázquez](#), “o Carrabouxo”, publicada no xornal [La Región](#)



<https://carrabouxo.es/2023/12/26/carra23-12-23/>

Estímulo 3.3: Viñeta de [Luís Davila Malvido](#), “o Bichero”, publicada no xornal [Faro de Vigo](#)



<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=977195437100954>

Tarefa 3.1. Tempo estimado para a resolución: 60 minutos. Segundo o CIS (Centro de Investigaciones Sociológicas) no ano 2023, o 75 % dos fogares son vivendas en propiedade, o dato máis baixo da serie histórica, e o resto son vivendas en alugueiro (desprezamos o dato doutras modalidades), tal e como se recolle no estímulo 3.1 e sinalan retranqueiramente os estímulos 3.2 e 3.3.

Das vivendas en propiedade, o 29 % pertencen a xoves entre 18 e 35 anos, mentres que das vivendas en alugueiro o 50 % están alugadas por xoves entre 18 e 35 anos.

1. O Goberno está a deseñar unha axuda ao alugueiro para xoves entre 18 e 35 anos. Que porcentaxe de persoas serían posíbeis receptoras das axudas?
2. Estuda se existe unha relación de dependencia entre os sucesos «vivenda en aluguer» e «ser xove entre 18 e 35 anos» sabendo que o 22 % da poboación pertence a esa franxa de idade.

Segundo un portal inmobiliario de referencia o alugueiro dun piso de 85 m² por termo medio é de 800 €. Considéranse infravivendas aquelas que non reúnen as condicións mínimas de habitabilidade, e son o 8 % das vivendas cun prezo de alugueiro máis barato. Se asumimos que o prezo do alugueiro dos pisos de 85 m² segue unha distribución normal,

3. Cal debe ser o prezo máximo dunha vivenda para pertencer á categoría de infravivenda, se sabemos que o 28,10 % dos alugueres son menores que 600 €?

Existen dous tipos de vivendas: de promoción privada, cando é unha empresa privada a que executa a obra e vende as vivendas a prezo de mercado, e as de promoción pública ou vivenda protexida, cando é o Estado ou o Goberno autonómico o que constrúe para vender ou alugar a colectivos con niveis de renda máis baixo ou a xoves. España é un dos países da Unión Europea con menos porcentaxe de vivenda pública: só o 2,5 % do total de vivenda construída é pública, fronte a Países Baixos ou Austria onde esta porcentaxe é do 30 % e 24 %, respectivamente.

4. Se tomamos 10 vivendas ao azar das construídas en España no último ano, cal é a probabilidade de que polo menos 3 sexan de promoción pública?
5. Se consideramos as 3.500 vivendas construídas no último ano en Galiza, cal é a probabilidade de que exactamente 80 sexan de promoción pública? e de que sexan máis ou igual que 100 e menos de 300?

Solución. (1) Denotemos

- A = «a vivenda está ocupada en aluguer».
- $\bar{A}$ = «a vivenda está ocupada pola propiedade».
- M = «a persoa que vive na casa ten entre 18 e 35 anos».

Xa que logo, dos datos que aparecen no enunciado temos que

$$P(A) = 0,25, \quad P(\bar{A}) = 0,75, \quad P(M/\bar{A}) = 0,29, \quad P(M/A) = 0,50. \quad (3.1)$$

Entón, calculamos a probabilidade das vivendas en alugueiro nas que reside unha persoa entre 18 e 35 anos

$$P(A \cap M) = P(M/A) \cdot P(A) = 0,50 \cdot 0,25 = 0,125. \quad (3.2)$$

Xa que logo, un 12,5 % da poboación sería posíbel receptora das axudas.

(2) A condición para que A e M sexan independentes é equivalente a

$$P(A \cap M) = P(A) P(M). \quad (3.3)$$

Temos que

$$P(A) = 0,25, \quad P(M) = 0,22 \quad P(A) P(M) = 0,25 \cdot 0,22 = 0,055. \quad (3.4)$$

Posto que os valores son diferentes ($0,125 \neq 0,055$) temos que non son sucesos independentes, é dicir, existe unha relación de dependencia entre ambos sucesos.

(3) Denotemos agora

- X = «prezo alugueres de vivendas de 85 m²», que segue unha distribución normal $N(800; \sigma)$.
- M = «prezo máximo das infravivendas».

Para calcular

$$P(X \leq M) = 0,08 \quad (3.5)$$

necesitamos calcular σ . Posto que sabemos que

$$P(X < 600) = 0,2810 \quad (3.6)$$

temos entón que

$$P\left(Z \leq \frac{600 - 800}{\sigma}\right) = 0,2810. \quad (3.7)$$

Xa que

$$1 - 0,2810 = 0,7190, \quad (3.8)$$

na táboa da distribución normal $N(0;1)$ a 0,7190 lle corresponde 0,58, é dicir

$$\frac{600 - 800}{\sigma} = -0,58, \quad (3.9)$$

de onde finalmente deducimos que

$$\sigma = 344,83. \quad (3.10)$$

Agora xa podemos empregar que

$$P\left(X \leq \frac{M - 800}{344,83}\right) = 0,08 \quad (3.11)$$

de onde

$$\frac{M - 800}{344,83} = -1,42 \quad (3.12)$$

que implica que

$$M = 310,34 \text{ €}. \quad (3.13)$$

As vivendas de 85 m² cun prezo de alugueiro menor ou igual a 310,34 € non reúnen as condicións de habitabilidade.

(4) Empregamos agora a notación $X =$ «número de vivendas de promoción pública das dez» que podemos aproximar por unha distribución binomial $B(10; 0,025)$. Temos

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} 0,025^0 0,975^{10} + \binom{10}{1} 0,025^1 0,975^9 + \binom{10}{2} 0,025^2 0,975^8 \right] \\ &\approx 1 - [0,78 + 0,20 + 0,02] = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

(5) Agora denotamos $X =$ «número de vivendas de promoción pública das 3.500» que segue unha distribución binomial $B(3.500; 0,025)$. Posto que

$$n = 3.500 \geq 30, \quad np = 87,5 > 5, \quad nq = n(1 - p) = 3.412,5 > 5, \quad (3.15)$$

aproximamos a binomial $B(3.500; 0,025)$ por unha distribución normal onde

$$\mu = np = 87,5, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 9,24. \quad (3.16)$$

Empregamos a aproximación de Yates para calcular

$$P(X = 80) \approx P(79,5 < X' \leq 80,5) = P(-0,87 < Z \leq -0,76), \quad (3.17)$$

onde agora empregamos a propiedade de simetría para continuar

$$\begin{aligned} P(X = 80) &\approx P(0,76 < Z \leq 0,87) \\ &= P(Z \leq 0,87) - P(Z \leq 0,76) = 0,8078 - 0,7764 = 0,0314. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Calculamos empregando as mesmas ideas

$$\begin{aligned} P(100 \leq X < 300) &\approx P(99,5 < X' \leq 299,5) = P(1,30 < Z \leq 22,94) \\ &= P(Z \leq 22,94) - P(Z \leq 1,30) = 1 - 0,9032 = 0,0968. \end{aligned} \quad (3.19)$$

□

Tarefa 3.2. Tempo estimado para a resolución: 40 minutos. Unha das causas do alto prezo das vivendas é que a cantidade de vivendas novas que se constrúen e o número de fogares novos que se crean vai cada vez máis descompasado, como se mostra no gráfico da esquerda:



O gráfico da dereita mostra o número de vivendas en miles que se construíron desde 2016 (tomamos 2016=0) ata o ano 2023. Podemos aproximar a función que expresa o número de vivendas construídas en función do ano mediante

$$f(x) = 0,07x^3 - 1,89x^2 + 15,13x + 47,75. \quad (3.20)$$

1. Calcula os intervalos de crecemento e de decrecemento do número de vivendas que se constrúen entre o ano 0 (2016) e ata o ano 15 (2031), de seguir co mesmo comportamento a construción de vivendas.
2. En que anos se atinxe os números máximo e mínimo de vivendas construídas nese mesmo intervalo de tempo e cantas vivendas serían?
3. Cres que o número de vivendas construídas anualmente tende a estabilizarse en algún valor?
4. Determina o promedio esperado de vivendas construídas anualmente no período entre 2016 e 2031, sabendo que o promedio dunha función $f(x)$ nun intervalo $[a, b]$ vén dado por

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.21)$$

Solución. (1) A función $f(x)$ dada na ecuación (3.20) é de tipo polinomial, polo que é continua e derivábel en toda a recta real. Ademais,

$$f'(x) = 0,21x^2 - 3,78x + 15,13, \quad (3.22)$$

de onde temos que os posíbeis extremos relativos de f son os valores onde se anula a súa derivada, para o que resolvemos

$$0,21x^2 - 3,78x + 15,13 = 0, \quad (3.23)$$

con solucións

$$x_1 = 6,00795, \quad x_2 = 11,9921. \quad (3.24)$$

Se analizamos o signo da derivada primeira antes e despois destes dous valores, temos que no intervalo $(0, x_1)$ a función $f'(x)$ é positiva, polo que a función f é crecente. No intervalo (x_1, x_2) a función $f'(x)$ é negativa, polo que a función f é decrecente. Finalmente, para valores maiores que x_2 a función $f'(x)$ volve a ser positiva, polo que novamente f é

crecente. Podemos afirmar entón que a construción de vivendas aumenta desde 2016 ata o ano 2022 e a partir de 2028, mentres que diminúe entre 2022 e 2028.

(2) Para determinar se son realmente extremos e, no caso de ser extremos que tipo de extremos son, podemos ou ben analizar o signo da derivada primeira antes e despois de cada un dos posíbeis extremos, ou ben analizar o signo da derivada segunda neses puntos. No primeiro caso, xa temos a análise feita no apartado anterior, polo que podemos deducir que ten dous extremos relativos: un máximo relativo no punto $x_1 = 6,00795$ e un mínimo relativo no punto $x_2 = 11,9921$.

Se optamos pola segunda opción (análise da derivada segunda) temos que

$$f''(x) = 0,42x - 3,78, \quad f''(x_1) = -1,25666, \quad f''(x_2) = 1,25666. \quad (3.25)$$

Xa que logo, obtemos novamente que a función f presenta un máximo relativo no punto $x_1 = 6,00795$ e un mínimo relativo no punto $x_2 = 11,9921$.

Agora ben, posto que o cálculo diferencial só fai a análise nos puntos dos intervalos abertos, quedan por analizar os puntos $x_0 = 0$ e $x_3 = 15$. Se calculamos os valores, temos

$$f(x_0) = 47,75, \quad f(x_1) = 85,61, \quad f(x_2) = 78,11, \quad f(x_3) = 85,7. \quad (3.26)$$

En consecuencia, podemos afirmar que o mínimo (absoluto) de vivendas construídas produciuse no ano 2016 e foi de $47,75 \cdot 1.000 = 47.750$ vivendas, mentres que se espera que o máximo absoluto de vivendas construídas será algo máis tarde no punto $x_3 = 15$, que corresponde ao ano $2013+15$, e será de $85,7 \cdot 1.000 = 85.700$ vivendas.

(3) Calculamos o límite da función $f(x)$ cando $x \rightarrow +\infty$ que resulta ser (máis) infinito ao ser unha función polinomial de terceiro grao con coeficiente principal positivo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0,07x^3 - 1,89x^2 + 15,13x + 47,75 = +\infty. \quad (3.27)$$

Polo tanto, con este modelo, o número de vivendas construídas anualmente medraría sen límite.

(4) Temos que calcular

$$\frac{1}{15} \int_0^{15} f(x) dx = \frac{1}{15} \left[0,0175x^4 - 0,63x^3 + 7,565x^2 + 47,75x \right]_0^{15} = 78,5375. \quad (3.28)$$

Polo tanto, o promedio de vivendas construídas anualmente será de 78.538 vivendas. $\square$

Tarefa 3.3. Tempo estimado para a resolución: 50 minutos. Os concellos teñen competencias para limitar o número de metros cadrados de construción en relación coas dimensións da parcela. Esta relación chámase coeficiente de edificabilidade e pode variar incluso dentro do mesmo concello, en función da cualificación da parcela no PXOM (Plan xeral de ordenación municipal).

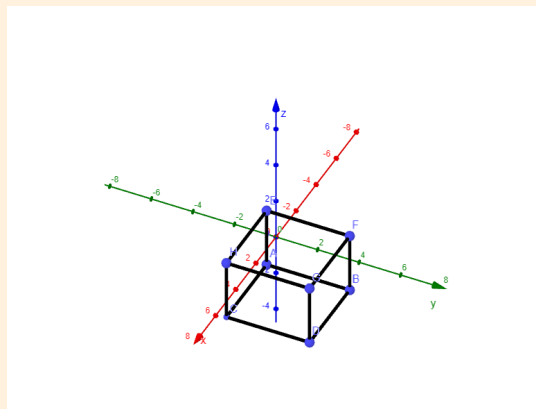
A promotora inmobiliaria GALINOVA proxecta construír un bloque de vivendas no teu concello nunha parcela onde o coeficiente de edificabilidade é de 6,15, é dicir, por cada m^2 de parcela pódense construír $6,15\text{m}^2$ de edificación.

A promotora quere construír un soto para garaxes, un baixo para locais comerciais e 5 andares de vivendas.

No proxecto contéplase revestir a fachada dunhas pranchas ignífugas, para minimizar o risco de propagación do lume, xa que non últimos meses varias edificacións sufriron accidentes deste tipo con resultado de morte. O prezo das pranchas é de 100 €/m^2 . A forma e a situación do bloque nun sistema de referencia tridimensional é o da figura, onde

$$A = (3, 1, 1), \quad B = (3, 5, 1), \quad C = (7, 1, 1), \quad E = (3, 1, 4),$$

e as coordenadas corresponden a decenas de metros.



1. Canto debe medir como mínimo a parcela para respectar as normas urbanísticas do concello e poder obter licenza de construción?
2. Cal é a razón entre volume de obra construída e m^2 da parcela?
3. A empresa quere reformular o proxecto cambiando as medidas das fachadas mantendo constante o volume da edificación para que o coste dos paneis ignífugos da fachada sexa o menor posíbel. Polas dimensións dos paneis, a planta do edificio debe ser cadrada. Ademais, mercarán a maiores tantos paneis como a metade da superficie da base do edificio, para repoñer en caso de deterioro ou de obras. Cales deberían ser as dimensións do edificio nese caso?
4. Cal sería o custo dos paneis da fachada?

5. Outra das limitacións que ten o equipo que elabora o proxecto é que a rampa de baixada aos garaxes non supere o 18 % de pendente, para que sexa accesíbel para peóns e non se deteriorenen os baixos dos coches. Consonte os seus cálculos a rampa tería de ecuación

$$x + 5z + 2 = 0, \quad (3.29)$$

pero non están seguros de que non se sobrepase a pendente do 18 %. Poderías axudalos empregando [Geogebra](#)? Poderías axudalos sen empregar [Geogebra](#)?



Imaxe obtida de <https://www.freepik.com>

Solución. (1) Determinamos os vectores

$$\overrightarrow{AB} = (0, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (4, 0, 0). \quad (3.30)$$

Xa que logo,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -16). \quad (3.31)$$

O módulo do vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é 16, polo que temos entón 1.600 m² de superficie de paralelogramo que forma a base de cada andar.

Posto que temos 1 soto, 1 baixo e 5 andares de vivendas, resulta un total de 7 plantas, de xeito que

$$7 \cdot 1.600 = 11.200 \text{ m}^2 \text{ de obra construída.} \quad (3.32)$$

Xa que o coeficiente de edificabilidade é de 6,15 formulamos

$$\frac{6,15 \text{ m}^2 \text{ construción}}{1 \text{ m}^2 \text{ de parcela}} = \frac{11.200 \text{ m}^2}{x} \quad (3.33)$$

de onde resulta que

$$x = \frac{11.200}{6,15} = 1.821,13 \text{ m}^2 \quad (3.34)$$

necesarios de parcela para obter a licenza municipal.

(2) Calculamos o volume do paralelepípedo

$$\text{Volume} = | [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}] | = | \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} | = | -48u^3 | = 48u^3. \quad (3.35)$$

En consecuencia

$$\text{Volume} = 48.000 \text{ m}^3. \quad (3.36)$$

Unha vez calculado o volume de obra construída, a razón pedida é

$$\frac{48.000}{1.821} = \frac{16.000}{607} \quad (3.37)$$

(3) Temos que

$$\text{Volume} = 48.000 \text{ m}^3 = x^2 y, \quad (3.38)$$

de onde

$$y = \frac{48.000}{x^2} \quad (3.39)$$

Temos que minimizar a función

$$f(x, y) = 4xy + \frac{x^2}{2} = 4x \frac{48.000}{x^2} + \frac{x^2}{2} = \frac{192.000}{x} + \frac{x^2}{2}. \quad (3.40)$$

Consideramos entón a función obxectivo que minimizar

$$g(x) = \frac{192.000}{x} + \frac{x^2}{2}, \quad x \neq 0. \quad (3.41)$$

Se derivamos a función obxectivo resulta

$$g'(x) = -\frac{192.000}{x^2} + x, \quad (3.42)$$

de xeito que os posíbeis extremos de g son os puntos onde se anula a súa derivada,

$$-\frac{192.000}{x^2} + x = 0, \quad (3.43)$$

de onde resulta

$$x = \sqrt[3]{192.000} = 57,69 \text{ m.} \quad (3.44)$$

Polo tanto,

$$y = 14,42 \text{ m.} \quad (3.45)$$

Podemos comprobar que é un mínimo estudando o signo de $g'(x)$ antes e despois do punto crítico ou analizando o signo da derivada segunda de g :

$$g''(x) = \frac{192.000}{x^3} + 1 \quad (3.46)$$

que resulta positivo no punto crítico, polo que temos un mínimo relativo.

(4) Finalmente, o custo dos paneis da fachada é

$$\left[4 \cdot 57,69 \cdot 14,42 + \frac{(57,69)^2}{2} \right] 100 = 499.162,73 \text{ €}. \quad (3.47)$$

(5) Resolvemos analiticamente a tarefa, sen empregar Geogebra. O vector normal ao plano da rampa é

$$\vec{n}_1 = (1, 0, 5). \quad (3.48)$$

Podemos calcular o plano da planta do edificio mediante

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.49)$$

de onde resulta o plano

$$-16z + 16 = 0, \quad (3.50)$$

con vector normal

$$\vec{n}_2 = (0, 0, -16). \quad (3.51)$$

Calculamos agora o ángulo α entre os dous vectores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ mediante

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{80}{16 \sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \approx 0,98. \quad (3.52)$$

Polo tanto, o ángulo α é de 11,48 graos, ou de 0,197396 radiáns. Finalmente, posto que

$$\tan \alpha = \tan \left(\arccos \left(\frac{5}{\sqrt{26}} \right) \right) = \frac{1}{5} = 0,20, \quad (3.53)$$

temos que a pendente é do 20 %, que supera o proxectado. $\square$

Tarefa 3.4. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. Para fixar o prezo das vivendas a construtora GALINOVA analiza a facturación que declara outra empresa do sector, INMOGAL, pola venda de tres bloques de vivendas construídos na mesma zona. Vendéronse tres tipos de vivendas: familiar (95m²), estándar (80m²) e óptima (50m²). Os datos móstranse na seguinte táboa:

	Familiar	Estándar	Óptima	Facturación total
Bloque 1	12	18	20	12.050.000 €
Bloque 2	7	8	10	6.050.000 €
Bloque 3	5	10	10	6.000.000 €

1. Calcula a partir dos datos anteriores, se é posíbel, o prezo de cada un dos tipos de vivenda. É única a solución?
2. Se GALINOVA pescuda por unha persoa que mercou unha vivenda óptima nun dos bloques que o seu prezo foi de 212.500 €, cal foi o prezo da vivenda familiar e da estándar?

Solución. (1) Sexan x , y e z os prezos das vivendas familiar, estándar e óptima, respectivamente. Segundo os datos que aparecen na táboa do enunciado podemos formular en primeiro lugar o sistema de ecuacións lineares:

$$\begin{cases} 12x + 18y + 20z = 12.050.000 \\ 7x + 8y + 10z = 6.050.000 \\ 5x + 10y + 10z = 6.000.000 \end{cases} \quad (3.54)$$

ou equivalentemente

$$AX = B, \quad (3.55)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 20 \\ 7 & 8 & 10 \\ 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12.050.000 \\ 6.050.000 \\ 6.000.000 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Realizamos operacións elementais na matriz $(A|B)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 18 & 20 & 12.050.000 \\ 7 & 8 & 10 & 6.050.000 \\ 5 & 10 & 10 & 6.000.000 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 6.050.000 \\ 5 & 10 & 10 & 6.000.000 \end{array} \right). \quad (3.57)$$

Polo tanto, temos que o número de ecuacións é 2 mentres que o número de incógnitas é 3. Ademais, observando os rangos podemos afirmar que temos un sistema compatíbel intederminado, que ten infinitas solucións dadas por:

$$x = \alpha \in \mathbf{R}, \quad y = 25.000 - x, \quad z = 625.000 - \frac{3x}{2}, \quad (3.58)$$

ou ben mediante

$$x = \frac{2}{3}(625.000 - z), \quad y = \frac{2}{3}(587.500 - z), \quad z = \beta \in \mathbf{R}. \quad (3.59)$$

(2) Se agora sabemos que o prezo dunha vivenda de tipo óptima foi de 212.500 €, entón podemos calcular os valores das outras variábeis, quee resultan

$$x = 275.000 \text{ €}, \quad y = 250.000 \text{ €}, \quad (z = 212.500 \text{ €}). \quad (3.60)$$

□

Tarefa extra 3.1. Constrúe un texto sobre os problemas de vivenda no teu concello en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 3.2. A estabilidade no mercado inmobiliario é moi importante para garantir o mantemento dos prezos. Esta estabilidade baséase no valor positivo da diferenza do número de vivendas construídas cada ano e o número de vivendas construídas o ano anterior.

1. Tendo en conta o sinalado na ecuación (3.20) constrúe a función de estabilidade, $E(x)$ en miles de vivendas.
2. Representa graficamente a función de estabilidade no mercado, facendo o seu estudo.
3. Sabendo que o mercado é estábel se a diferenza de vivendas entre dous anos consecutivos non supera as 1.000 vivendas, analiza a estabilidade entre 2022 e 2023.
4. Consideras que o mercado se vai manter estábel nos vindeiros anos de seguir co ritmo de construción estimado?

Solución. (1) Da definición da función $f(x)$ na ecuación (3.20) temos

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= 0,07x^3 - 1,89x^2 + 15,13x + 47,75 \\ &\quad - (0,07(x-1)^3 - 1,89(x-1)^2 + 15,13(x-1) + 47,75) \\ &= 0,21x^2 - 3,99x + 17,09. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Posto que a diferenza pode ser positiva ou negativa temos que

$$E(x) = |0,21x^2 - 3,99x + 17,09|. \quad (3.62)$$

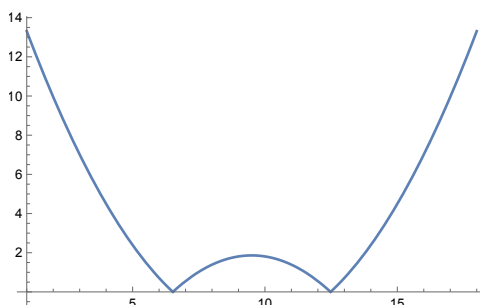
Para representar graficamente a función temos que determinar en primeiro lugar as raíces do polinomio de segundo grao para logo analizar o valor absoluto. Temos que

$$0,21x^2 - 3,99x + 17,09 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6,52191, \\ x_2 = 12,4781. \end{cases} \quad (3.63)$$

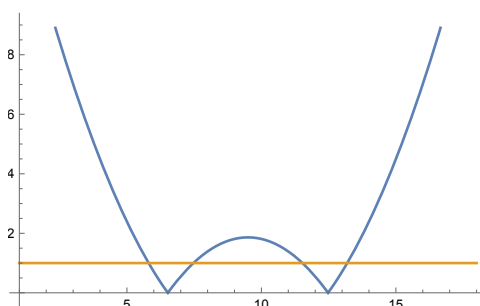
Analizamos o signo de $f(x) - f(x-1)$ nos intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) e $(x_2, +\infty)$. No primeiro intervalo $f(x) - f(x-1)$ é positivo; no segundo negativo e no terceiro positivo novamente. Polo tanto,

$$E(x) = \begin{cases} 0,21x^2 - 3,99x + 17,09, & x \leq x_1 \approx 6,52, \\ -(0,21x^2 - 3,99x + 17,09), & x \in (x_1, x_2) \approx (6,52, 12,48), \\ 0,21x^2 - 3,99x + 17,09, & x \geq x_2 \approx 12,48. \end{cases} \quad (3.64)$$

A representación gráfica é entón



(2) Se representamos a función $E(x)$ xunto con $y = 1$ resulta



Na escala empregada o ano 2022 corresponde con $x = 6$ e o ano 2023 corresponde co ano $x = 7$ co cal temos que analizar se nese período a función $E(x)$ é menor que $y = 1$. Se resolvemos as interseccións de $E(x)$ con $y = 1$ resultan os puntos

$$x_1 = 5,80799, \quad x_2 = 7,47339, \quad x_3 = 11,5266, \quad x_4 = 13,192. \quad (3.65)$$

No intervalo (x_1, x_2) si que se verifica que $E(x) < 1$ polo que nese período de tempo houbo estabilidade.

(3) Á vista da gráfica anterior o esperado é nos vindeiros anos $E(x)$ terá valores maiores que 1.

□

Tarefa extra 3.3. Unha persoa multipropietaria posúe un edificio enteiro de 80 pisos de 60 m², que ten en alugueiro a un prezo de 500 € mensuais cada un deles. Non contenta esta persoa cos 40.000 € de renda que ingresa mensualmente só por este edificio quere subir o prezo do alugueiro, pero observa que por cada 10 € de incremento no prezo perde unha familia inquilina. Cal é o prezo ao que lle convén arrendar os pisos para maximizar (aínda máis) os seus beneficios?

Solución. Denotaremos por x o número de familias inquilinas que perde. Entón, a función do beneficio en función de x vén dada por

$$f(x) = (80 - x)(500 + 10x). \quad (3.66)$$

Se derivamos e igualamos a cero obtemos un único punto crítico,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15. \quad (3.67)$$

Ademais, posto que $f''(x) = -20$ temos que nese punto hai un máximo relativo da función beneficio. É dicir, pode permitirse perder 15 familias que terán que buscar outro aloxamento, e alugando 65 dos seus pisos terá o maior beneficio mensual. Temos que

$$f(15) = 42.250 \text{ €}, \quad (3.68)$$

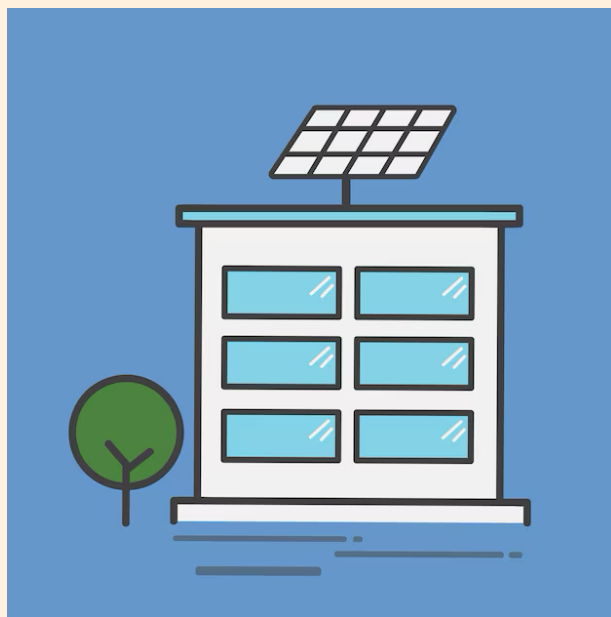
polo que esta persoa tería un beneficio un 5,6 % maior incrementando os prezos dos alugueiros até chegar aos 650 € mensuais.

□

Tarefa extra 3.4. No alto do edificio, que está deseñado co teito plano e que nun sistema de coordenadas tridimensional ten por ecuación $z = 0$, instálanse paneis solares que seguen a ecuación

$$2x + 3y + 7z + 21 = 0, \quad (3.69)$$

no mesmo sistema tridimensional.



Imaxe obtida de <https://www.freepik.com>

A certa hora do día a luz solar segue a traxectoria da recta que pasa polo punto $A(2, 1, -3)$ e ten por vector director $\vec{v}_\ell = (m, -2, 10)$. Aos efectos da produción de enerxía solar é moi importante o ángulo de inclinación das placas con respecto ao teito chairo do edificio. En Galiza a inclinación óptima para a produción de enerxía solar varía entre 20 e 40 graos, segundo a estación do ano.

1. Calcula os valores de m para que a luz do sol incida acaidamente sobre o panel solar.
2. Estuda se o teu panel está acaidamente orientado para facer un bo aproveitamento da luz solar.

Solución. (1) Definimos o plano π pola ecuación (3.69) e a recta r mediante

$$\begin{cases} x = m\lambda + 2, \\ y = -2\lambda + 1, \\ z = 10\lambda - 3, \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \quad (3.70)$$

Estudamos a posición relativa da recta r mais o plano π , substituindo a forma paramétrica da recta na ecuación do plano:

$$2(m\lambda + 2) + 3(-2\lambda + 1) + 7(10\lambda - 3) + 21 = \lambda(2m + 64) + 7 = 0, \quad (3.71)$$

de onde resulta

1. Se $m = -32$ entón queda $0 = -7$ polo que a luz solar e os paneis serían paralelos.
2. Se $m \neq -32$ entón os raios solares inciden no panel.

(2) Calculamos a inclinación do panel, que está no plano π respecto ao teito do edificio $z = 0$. O ángulo entre estes dous planos é o mesmo ángulo que o formado polos seus vectores normais $\vec{n}_\pi = (2, 3, 7)$ e $\vec{n}_z = (0, 0, 1)$.

$$\cos \angle(\vec{n}_\pi, \vec{n}_z) = \frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_z}{|\vec{n}_\pi| |\vec{n}_z|} = \frac{7}{\sqrt{62}} \approx 0,89. \quad (3.72)$$

Polo tanto,

$$\angle(\vec{n}_\pi, \vec{n}_z) = \arccos 0,89 \approx 27,2 \text{ graos}. \quad (3.73)$$

Xa que logo, o panel está correctamente colocado. □

Tarefa extra 3.5. Inspirada na Directiva [INSPIRE](#) (Infrastructure for Spatial Information in Europe) e ante a necesidade de organizar e poñer en común a información espacial das diferentes Infraestruturas de datos Espaciais dos Estados Membros, o [IGE](#) ten publicada a seguinte táboa a distribución de habitantes (en intervalos), número de cuadrículas de 1 km² (celas uniformes de 1 km de lado), e tamén a poboación total do número de cuadrículas de cada intervalo (datos do 2022) en Galiza.

Habitantes	Número de cuadrículas	% de cuadrículas	Poboación	% de Poboación
0 habitantes	11710	38,05	0	0
De 1 a 20	8532	27,70	78196	2,9
De 21 a 49	4743	15,41	154154	5,7
De 50 a 99	2656	8,63	184424	6,9
De 100 a 499	2418	7,86	503925	18,7
De 500 a 999	332	1,08	228369	8,5
De 1.000 a 2.499	218	0,71	346489	12,9
De 2.500 a 4.999	87	0,28	307430	11,4
De 5.000 a 9.999	44	0,14	301192	11,2
De 10.000 ou máis	36	0,12	586285	21,8
Total	30776	100	2690464	100

1. Define unha variábel aleatoria discreta que verifique que a súa esperanza represente a densidade^a de poboación media por km² en Galiza.
2. Sempre se considera a Galiza como un país con moita dispersión de habitantes. Podes comprobalo? Podes empregar como referencia os datos do ano 2022 de Catalunya e Madrid: 246 e 853 h/km², respectivamente.

^aDefínese densidade de poboación como a cantidade de persoas que habitan por unidade de superficie

Solución. Os datos da táboa están expresados en 1 km², polo que para obter a densidade media a unidade de referencia será a mesma. Sexa a variábel

$$D = \text{Valores de densidade de poboación por km}^2 \text{ en Galiza,} \quad (3.74)$$

Xa que valores de poboación da táboa que se indican veñen expresados en rangos, a variábel X tomará valores dados polo punto medio do intervalo agás o último (o que se

coñece como marca de clase do intervalo). Deste xeito a función masa de probabilidade vén dada pola porcentaxe de cuadrículas sobre o total:

	0	1-20	21-49	50-99	100-499	500-999
d_i	0	10,5	35	74,5	295,5	749,5
$\tilde{d}_i$	0	9,17	32,50	69,43	208,41	687,86
p_i	0,3805	0,2772	0,1541	0,0863	0,0786	0,0108

	1000-2499	2500-4999	5000-9999	≥ 10000
d_i	1749,5	3749,5	7499,5	10000
$\tilde{d}_i$	1589,40	3533,68	6845,27	16285,69
p_i	0,0071	0,0028	0,0014	0,0012

A probabilidade de observar un Rango/ d_i determinado será a de obter unha cuadrícula, así a $p_i = P(D = d_i)$ virá dada pola columna % cuadrículas.

Dado que a táboa tamén achega a columna Poboación para o total de habitantes dentro de cada rango, é preferíbel, no lugar da marca de clase (d_i), coller a poboación por número de cuadrículas dentro de cada rango, e dicir, definir

$$\tilde{d}_i = \frac{\text{Poboación Total}}{\text{Número cuadrículas}}. \quad (3.75)$$

que denotaremos pola variábel $\tilde{D}$.

En ambos casos a densidade promedio se calcularía mediante:

$$\mu_D = E(D) = \sum_{i=1}^n d_i \cdot p_i \quad (3.76)$$

obtendo valores de 91,47 e 87,64 habitantes por km^2 , moi semellantes. Convén sinalar que o valor máis aproximado ao obtido sen agrupar os datos debería ser o de 87,64.

Habitantes	d_i	n°cuad	p_i	pob	$\tilde{d}_i$	$d_i \cdot p_i$	$\tilde{d}_i \cdot p_i$
0 habitantes	0	11710	0,3805	0	0,00	0	0,00
De 1 a 20	10,5	8532	0,2772	78196	9,17	2,91	2,54
De 21 a 49	35	4743	0,1541	154154	32,50	5,39	5,01
De 50 a 99	74,5	2656	0,0863	184424	69,44	6,43	5,99
De 100 a 499	295,5	2418	0,0786	503925	208,41	23,23	16,38
De 500 a 999	749,5	332	0,0108	228369	687,86	8,09	7,42
De 1.000 a 2.499	1749,5	218	0,0071	346489	1589,40	12,42	11,28
De 2.500 a 4.999	3749,5	87	0,0028	307430	3533,68	10,50	9,89
De 5.000 a 9.999	7499,5	44	0,0014	301192	6845,27	10,5	9,58
De 10.000 ou máis	10000	36	0,0012	586285	16285,69	12,00	19,54
Suma				2690464		$\mu_D = 91,47$	$\mu_{\tilde{D}} = 87,64$

Calculamos a varianza da densidade de poboación pola fórmula:

$$\text{Var}(D) = \sum_{i=1}^n d_i^2 \cdot p_i - \mu_D^2, \quad (3.77)$$

para o cal elaboramos a seguinte táboa

d_i	p_i	$\tilde{d}_i$	d_i^2	$\tilde{d}_i^2$	$d_i^2 \cdot p_i$	$\tilde{d}_i^2 \cdot p_i$
0,0	0,3805	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10,5	0,272	9,17	110,25	84,09	30,56	23,31
35,0	0,1541	32,50	1225,00	1056,25	188,77	162,77
74,5	0,0863	69,44	5550,25	4821,91	478,99	416,13
295,5	0,0786	208,41	87320,25	43434,73	6863,37	3413,97
749,5	0,0108	687,86	561750,25	473151,38	6066,90	5110,03
1749,5	0,0071	1589,40	3060750,25	2526192,36	21731,33	17935,97
3749,5	0,0028	3533,68	14058750,25	12486894,34	39364,50	34963,30
7499,5	0,0014	6845,27	56242500,25	46857721,37	78739,50	65600,81
10000	0,0012	16285,69	100000000,00	265223698,78	120000,00	318268,44
Suma					273463,9	445894,7

Polo tanto, as varianzas son

$$\sigma_D^2 = 273463,9 - 91,47^2 = 265097,1, \quad \sigma_{\tilde{D}}^2 = 445894,7 - 87,64^2 = 438213,9. \quad (3.78)$$

As desviacións típicas son

$$\sigma_D = \sqrt{265097,1} = 514,9, \quad \sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{438213,9} = 661,97, \quad (3.79)$$

habitantes por km^2 , respectivamente.

Observamos que a dispersión da variable toma valor de 661,97 h/ km^2 fronte a un valor medio de 87,64 h/ km^2 . Valor moi alto, polo tanto, indicando unha grande variabilidade e dispersión da densidade de poboación galega. O coeficiente de variación de Pearson,

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{661,97}{87,64} = 7,58, \quad (3.80)$$

corroborar o indicando anteriormente. Se comparamos cos datos que aparecen no enunciado de Catalunya e Madrid, certamente temos unha dispersión moi alta.

□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois, ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado, o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (*Influencers*) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.

A vintage map of London serves as the background. Various travel-related items are scattered across it: a round compass in the upper right, a blue mug with 'Coffee' written on it, a black camera with a brown strap, wooden blocks spelling 'TRAVEL', and a red passport with a crown emblem. The map shows landmarks like Regent's Park, Euston Station, and the River Thames.

Taxas turísticas

Situación de aprendizaxe 4. Despois dun amplo debate con moitos sectores, tres concellos do país comezaron a cobrar a denominada taxa turística para axudar a compensar os gastos que xeran as persoas que visitan as súas cidades. A recadación desta taxa faise a través da **ATRIGA**, a Axencia Tributaria de Galiza. Ademais, os centros hostaleiros teñen que informar de determinados datos, como poden ser a procedencia das persoas que se aloxan neles. Baixo estas premisas presentamos a primeira situación de aprendizaxe que esperamos sirva para facer reflexionar e comprender a necesidade de termos un turismo sustentábel e respectuoso. Como reto final debe evidenciarse un produto final: construción dun texto que se sirva da resolución das distintas tarefas e empregue os estímulos presentados para facer unha proposta de taxa turística.

Imaxe de fondo obtida de <https://www.freepik.com>

Estímulo 4.1: Entendendo a taxa turística.

Nos últimos anos, a chamada «taxa turística» converteuse en algo habitual en moitos destinos turísticos, tanto en España como no estranxeiro. En Galicia, a insistencia do concello de Santiago de Compostela abriu a porta a que no ano 2025 comece o cobro da dita taxa, ao abeiro dunha nova normativa elaborada pola Xunta de Galicia para todos aqueles concellos galegos que queiran aplicala.

Este imposto busca equilibrar os beneficios que trae o turismo cunha xestión sostible dos impactos negativos e os custos que xera. Xa que logo, aplícase a visitantes que se aloxan en establecementos turísticos: hoteis, apartamentos turísticos, albergues, cámpings ou calquera outro tipo de aloxamento regulado. O importe cobrado adoita variar en función de factores como o tipo de establecemento, a categoría do aloxamento e a duración da estadía. Asemade, a taxa pode ser un importe fixo por noite ou unha porcentaxe sobre o custo da estadía.

O obxectivo principal deste imposto é que as/os turistas contribúan ao mantemento e mellora das infraestruturas e servizos dos municipios que visitan, compensando o impacto que a súa presenza ten sobre o territorio.

En destinos que experimentan unha forte presión turística, a taxa serve como mecanismo de financiamento para paliar problemas asociados ao turismo masivo, como a sobrecarga das infraestruturas, a xestión de residuos ou o deterioro do patrimonio cultural. Estes concellos deben facer fronte a gastos adicionais, pero os seus ingresos non son maiores, porque o sistema de ingresos municipal non inclúe ningunha fonte de ingresos que se vencelle de xeito directo co aumento de visitantes, coa excepción , pouco relevante en termos financeiros, da taxa pola instalación de terrazas nos locais de hostalería e a taxa por xestión de residuos que se vencella ao consumo de auga. Entre eses custos extra sinalados, salientan o mantemento de espazos públicos, a conservación do patrimonio histórico, o reforzo de servizos de limpeza, a seguridade e o transporte.

Complementariamente, a taxa tamén pode buscar limitar o turismo de baixo custo que non sempre xera beneficios suficientes para compensar o impacto ambiental e social que provoca. Porén, na meirande parte dos casos a taxa é tan pequena, entre 1 e 2 euros ao día, que non serve moito para desanimar realmente as visitas de turistas. Para iso habería que facer como o reino de Bután, situado na cordilleira do Himalaia, que cobra unha taxa turística de [100 dólares ao día por persoa](#).

A taxa turística é especialmente importante nos concellos que máis sofren o impacto das chegadas masivas de turistas, sobre todo en tempada alta. As infraestruturas, deseñadas para atender ás necesidades da poboación local, vense saturadas e teñen que facer fronte a un uso excesivo, o que xera un desgaste acelerado e incrementa a necesidade de mantemento.

A recadación da taxa permite axudar a financiar estas actuacións e, en moitos casos, promover proxectos de mellora urbana, como a renovación de espazos públicos ou a creación de novos servizos orientados tanto a visitantes como a residentes. Ademais, moitos municipios apostan por destinar parte dos fondos recadados a proxectos que melloren a oferta cultural, ambiental ou de lecer do destino.

En España, varios municipios e comunidades autónomas aplican a taxa turística. Cataluña foi pioneira coa súa introdución en 2012, e desde entón Barcelona converteuse nun dos exemplos máis salientábeis. As Illas Baleares tamén aplican unha taxa turística, que varía en función da tempada alta ou baixa e do tipo de aloxamento. Outras comunidades, como a Comunidade Valenciana ou Andalucía, están avaliando a posibilidade de implantala en certos destinos, xa que consideran que pode ser un xeito eficiente de xestionar o turismo en lugares ateigados no verán, como son Benidorm e Marbella.

A taxa turística tamén está implantada en moitos destinos europeos. A cidade de Venecia é un dos máis coñecidos, cunha taxa que pode acadar os 10 euros diarios, na procura de desincentivar o turismo de masas que afecta gravemente a súa infraestrutura e patrimonio. Francia e Alemaña tamén aplican taxas turísticas en cidades como París, Berlín e Múnic, que se destinan ao financiamento de proxectos culturais e á conservación do patrimonio histórico. Fóra de Europa, cidades como Nova York e San Francisco tamén contan con taxas que se integran no prezo dos aloxamentos. Ademais, destinos insulares como as Maldivas ou as Seychelles utilizan estas taxas para protexer os seus fráxiles ecosistemas naturais.

Aínda que as taxas turísticas adoitan xerar intensos debates públicos, as investigacións que se teñen feito mostran, en xeral, que unha taxa ben deseñada non afecta significativamente á demanda turística, especialmente se os importes son moderados e están en liña co nivel de gasto das persoas que se desprazan. Por exemplo, en Barcelona e as Illas Baleares, a introdución da taxa non causou un descenso no número de visitantes, o que suxire que as/os turistas aceptan este custo adicional sempre que se vexa compensado pola calidade do destino. Por outro lado, os estudos tamén mostran que a taxa turística pode ser unha ferramenta eficaz para promover un turismo máis sostíbel. Destinos que aplican taxas máis elevadas, como Venecia ou Ámsterdam, lograron limitar a chegada de turistas de baixo custo, reducindo así os problemas de masificación. Este efecto é especialmente importante en destinos con recursos naturais ou patrimoniais fráxiles, onde a saturación pode ter consecuencias irreversibles.

No que atinxe á utilización dos fondos recadados, os municipios que destinan parte das recadacións á mellora das infraestruturas turísticas e ao benestar da poboación local conseguen unha maior aceptación social desta medida. Ademais, o investimento en proxectos culturais e ambientais con estes fondos contribúe a mellorar a imaxe do destino internacionalmente, atraendo visitantes de maior poder adquisitivo e aumentando os ingresos totais derivados do turismo. En conclusión, a taxa turística é unha medida fiscal que, ben aplicada, pode axudar aos municipios turísticos a xestionar mellor os impactos do turismo e garantir a sostibilidade a longo prazo. As experiencias en España e novo ámbito internacional mostran que, ademais de xerar ingresos, pode ter efectos positivos sobre a calidade do turismo e a protección do patrimonio. A clave do seu éxito reside en atopar un equilibrio entre os importes da taxa e os investimentos que se realizan co diñeiro recadado, sempre co obxectivo de mellorar o benestar tanto de residentes como de visitantes.

Texto de **Santiago Lago-Peñas**, Catedrático de Economía Aplicada na [Universidade de Santiago de Compostela](#).

Estímulo 4.2: Viñeta de Xosé Lois González Vázquez, “o Carrabouxo”, publicada no xornal *La Región*



<https://carrabouxo.es/2024/07/05/carra3-7-24/>

Estímulo 4.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, “o Bichero”, publicada no xornal *Faro de Vigo*



<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=786732619480571>

Tarefa 4.1. Tempo estimado para a resolución: 20 minutos. No primeiro mes de posta en marcha desta medida, a **ATRIGA** só ingresou 6.000 euros polas 1.000 pernoctacións declaradas na cidade da Coruña, 2.000 na de Santiago de Compostela, e 1.000 na de Pontevedra, a pesar do que podes ver nos estímulos 4.1 e 4.2. Logo dunha primeira campaña informativa, que custou 1.000 euros a cada concello, no sector hoteleiro e nas vivendas de alugueiro turístico, no segundo mes a recadación chegou aos 36.000 euros, por 5.000, 20.000 e 3.000 pernoctacións declaradas, respectivamente. Os valores eran aínda moi baixos pois anualmente víñanse declarando máis dun millón e medio de pernoctacións en Santiago de Compostela, polo que os tres concellos decidiron facer unha segunda campaña máis agresiva cun orzamento total de 36.000 euros, froito dos ingresos do mes anterior. Xa no terceiro mes, a ATRIGA recadou 174.000 euros, froito das 25.000 pernoctacións na Coruña, 100.000 en Santiago de Compostela e 12.000 en Pontevedra.

1. Un amigo estranxeiro que coñeciches quere facer unha visita a esas tres cidades e quere saber cal é o prezo da taxa turística en cada un dos tres citados concellos. Debes escribir un correo electrónico para o teu amigo informando dos prezos.
2. Despois deses tres primeiros meses deciden repartir os beneficios de xeito proporcional ao valor da taxa turística que aplica cada concello. Canto ingresa cada concello?
3. Consideras que este xeito de reparto é xusto ou proporías un xeito diferente? Xustifica a túa resposta elaborando un texto estruturado en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a súa opinión, e segunda, a exposición da súa proposta.

Solución. Formulamos o sistema de ecuacións

$$\begin{cases} 1.000T_C + 2.000T_S + 1.000T_P = 6.000, \\ 5.000T_C + 20.000T_S + 3.000T_P = 36.000, \\ 25.000T_C + 100.000T_S + 12.000T_P = 174.000, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde T_S denota o valor da taxa turística por pernoctación en Santiago de Compostela, T_C

na Coruña e T_P en Pontevedra. Sexan

$$A = \begin{pmatrix} 1.000 & 2.000 & 1.000 \\ 5.000 & 20.000 & 3.000 \\ 25.000 & 100.000 & 12.000 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} T_C \\ T_S \\ T_P \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6.000 \\ 36.000 \\ 174.000 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Podemos dividir A e B por 1.000 antes de resolver o sistema $AX = B$ para obter

$$T_C = 2, \quad T_P = 2, \quad T_S = 1. \quad (4.3)$$

Os beneficios totais son

$$174.000 + 36.000 + 6.000 - 3.000 - 36.000 = 177.000 \text{ €}. \quad (4.4)$$

Posto que temos que repartilos de xeito proporcional á taxa que aplica cada concello, entón os beneficios de Santiago de Compostela serán de 35.400 €, mentres que os beneficios da Coruña e Pontevedra serán de 70.800 € en cada caso.

O sistema de reparto non semella xusto porque Santiago de Compostela rexistrou 122.000 pernoctacións neses tres meses, mentres que Pontevedra rexistrou 16.000 pernoctacións e A Coruña 31.000. É dicir, a suma de Pontevedra e A Coruña é de 47.000 pernoctacións fronte ás 122.000 de Santiago de Compostela e, porén, teñen máis ingresos. O problema vén derivado de que Santiago de Compostela aplica unha taxa inferior á das outras dúas cidades galegas. Unha solución máis xusta é repartir en función dos ingresos que xera na ATRIGA cada un dos concellos, pois é posíbel determinar a localización de cada establecemento que ingresa.

□

Tarefa 4.2. Tempo estimado para a resolución: 50 minutos. É frecuente escoitar nos medios de comunicación que unha determinada realidade segue un crecemento *exponencial*. Supoñamos que a túa cidade ten unha capacidade de 3.000 prazas de hotel. No ano cero houbo 100 turistas, e no primeiro ano houbo 257 turistas.

1. Supoñamos en primeiro lugar que o número de turistas $N(t)$ que chega á túa cidade segue un crecemento exponencial

$$N(t) = a \exp(bt), \quad (4.5)$$

onde a e b son parámetros e t representa o tempo. Cantos turistas habería no segundo ano? E no quinto ano? Como consideras que afectaría á vida das persoas no caso ser certo este modelo?

2. Consideremos agora estoutra función

$$\tilde{N}(t) = \frac{3.000}{1 + 29 \exp(-t)}, \quad (4.6)$$

onde $\exp(-t) = e^{-t}$ e novamente t representa o tempo. Representa graficamente a función. Cal é o valor en $t = 0$? Que sucede cando $t \rightarrow \infty$?

3. Cal das dúas funcións N ou $\tilde{N}$ consideras que é máis próxima á realidade? Xustifica a túa resposta.
4. Determina o promedio de turistas que recibirá a túa cidade entre o ano $t = 0$ e o ano $t = 5$ calculando

$$\frac{1}{5} \int_0^5 \tilde{N}(t) dt. \quad (4.7)$$

Sabendo que o promedio de turistas entre $t = 0$ e $t = 1$ é de 167 turistas cal sería o promedio entre o ano $t = 1$ e o ano $t = 5$?

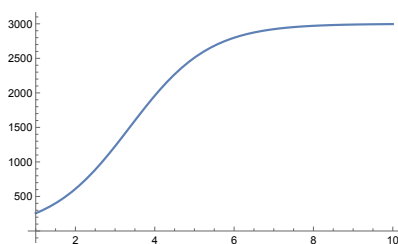
5. Calcula a recta tanxente á función $\tilde{N}(t)$ no punto $t = 5/2$, e integra esta función entre $t = 1$ e $t = 5$. Compara o resultado obtido co do apartado anterior.
6. Utiliza [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#) para representar nun mesmo gráfico a función $\tilde{N}(t)$ mais a súa recta tanxente no punto $t_0 = 5/2$. Tenta explicar se a aproximación do apartado anterior pode ser acaída ou non. Que sucedería se no lugar de aproximar desde $t = 1$ tentásemos aproximar desde $t = 0$?

Solución. (1) No primeiro caso temos que $N(0) = 100$ polo que $a = 100$. Ademais, posto que $N(1) = 257$ resulta que $b = \ln(257/100)$. Entón, temos que

$$N(2) = 660, \quad N(5) = 11.211 \quad (4.8)$$

que é moi superior ao número de prazas hostaleiras.

- (2) No segundo caso temos que $\tilde{N}(0) = 100$. Ademais, a gráfica da función é



Neste caso, a medida que o tempo aumenta, o número de persoas que vén de visita non chega a superar o número de prazas dispoñíbeis.

(3) Á vista dos resultados semella máis próxima á realidade a función $\tilde{N}(t)$.

(4) Se calculamos a integral indefinida (que é inmediata),

$$\int \frac{3.000}{1 + 29 \exp(-t)} dt = 3.000 \ln(29 + \exp(t)) + C, \quad (4.9)$$

de xeito que

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=5} \frac{3.000}{1 + 29 \exp(-t)} dt &= 3.000 \ln(29 + \exp(t)) \Big|_{t=0}^{t=5} \\ &= 3.000 (\ln(29 + \exp(5)) - \ln(30)) \approx 5.331,85. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Xa que logo, o promedio pedido é

$$\frac{1}{5} \int_{t=0}^{t=5} \frac{3.000}{1 + 29 \exp(-t)} dt = 1066,37 \text{ turistas.} \quad (4.11)$$

Para o cálculo no período entre $t = 1$ e $t = 5$ temos que calcular

$$\frac{1}{4} \int_1^5 \tilde{N}(t) dt. \quad (4.12)$$

Podemos facer as contas directamente ou ben empregar a propiedade aditiva da integral:

$$\frac{1}{4} \int_1^5 \tilde{N}(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^5 \tilde{N}(t) dt - \frac{1}{4} \int_0^1 \tilde{N}(t) dt. \quad (4.13)$$

Dos datos formulados e empregando os cálculos anteriores,

$$\frac{1}{4} \int_1^5 \tilde{N}(t) dt \approx \frac{1}{4} 5331,85 - 41,67 \approx 1291,2 \text{ turistas.} \quad (4.14)$$

(5) A ecuación da recta tanxente vén dada por

$$y = \tilde{N}\left(\frac{5}{2}\right) + \tilde{N}'\left(\frac{5}{2}\right) \left(t - \frac{5}{2}\right). \quad (4.15)$$

Posto que

$$\tilde{N}\left(\frac{5}{2}\right) = 887,452, \quad \tilde{N}'(t) = \frac{87.000 e^{-t}}{(29e^{-t} + 1)^2}, \quad \tilde{N}'\left(\frac{5}{2}\right) = 624,928, \quad (4.16)$$

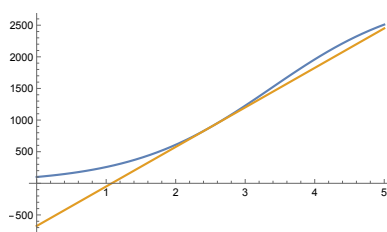
resulta que a ecuación da recta tanxente no punto solicitado é

$$r(t) = 887,452 + 624,928 \left(t - \frac{5}{2}\right) = -674,869 + 624,928t. \quad (4.17)$$

Se integramos, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{t=1}^{t=5} r(t)dt &= \int_{t=1}^{t=5} 624,928t - 674,869dt \\ &= 312,464t^2 - 674,868t \Big|_{t=1}^{t=5} \approx 4799,66. \quad (4.18)\end{aligned}$$

(6) A representación gráfica da función $\tilde{N}(t)$ é



Desde o tempo $t = 1$ ata o tempo $t = 5$ a aproximación é bastante boa, pero a medida que o tempo decrece a aproximación é cada vez peor e, de feito, para tempos menores que 1 os valores da recta tanxente son negativos, que non ten sentido pois o número de turistas sempre ten que ser unha cantidade positiva.

□

Tarefa 4.3. Tempo estimado para a resolución: 20 minutos. Debido ao gran número de turistas que chegan a moitas cidades, comezan a popularizarse os denominados hoteis cápsula, nos que as persoas só dispoñen dun minúsculo espazo para durmir. Este tipo de «solucións» son moi frecuentes no Xapón.



Unha familia empresaria do centro de Santiago de Compostela decide pechar un supermercado que daba servizo de comercio local nun barrio, para transformalo nun albergue deste tipo. Desafortunadamente, ao non ser algo moi habitual, a empresa que tiña encomendado facer as liteiras non entendeu ben o concepto e no lugar de ter disposición con elementos paralelos e perpendiculares, cada liteira abría nunha determinada dirección e sentido. O [concello de Santiago de Compostela](#) decide aplicar unha taxa turística dun euro por persoa e noite. Desde o punto de vista xeométrico os planos sobre os que se sitúan as liteiras veñen dados polas seguintes ecuacións, expresadas en metros:

$$\pi_1 : z = 1, \quad \pi_2 : z = 2, \quad \pi_3 : x + y = 1, \quad \pi_4 : x + z = 3. \quad (4.19)$$

Dividindo o traballo en grupos:

1. Estuda a posición relativa dos seguintes pares de planos (π_1, π_2) , (π_1, π_3) e (π_1, π_4) .
2. No caso de ser paralelos, determina a distancia entre eles e explica se consideras acaído o resultado.
3. No caso de ser secantes, determina o ángulo da intersección, e explica se consideras acaído o resultado.

Solución. O par de planos (π_1, π_2) son paralelos e están a unha distancia de $2-1=1$ metros en altura. Non semella moi boa idea pois significaría que as liteiras están pouco separadas en altura unha da outra. En calquera caso, si que respectan o sinalado no enunciado de ter disposicións paralelas (e perpendiculares). Pódese sinalar que $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ e $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ antes de afirmar que os planos son paralelos.

O par de planos (π_1, π_3) son perpendiculares xa que $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ e $\vec{n}_3 = (1, 1, 0)$ de xeito que se calculamos o produto escalar $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 0$, é dicir, son perpendiculares. Xa que logo o ángulo que forman estes dous planos é de noventa graos ou $\pi/2$ radiáns. O resultado semella lóxico pois no enunciado di que se buscan disposicións (paralelas e) perpendiculares.

Finalmente, polo que respecta ao par de planos (π_1, π_4) , temos que $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ e $\vec{n}_4 = (1, 0, 1)$, polo que non son nin paralelos nin perpendiculares. Calculamos o ángulo

entre estes dous planos mediante

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_4) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{1\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (4.20)$$

de xeito que

$$\angle(\pi_1, \pi_4) = \frac{\pi}{4}. \quad (4.21)$$

□

Tarefa 4.4. Tempo estimado para a resolución: 20 minutos. Unha cadea hostaleira quere abrir un hotel de luxo, e por datos do [Instituto Galego de Estatística](#), sabe que o gasto mínimo diario dos seus clientes é de 90 €. No modelo de negocio determina que para que sexa viábel o hotel de luxo, a porcentaxe de clientes cun gasto mínimo de 90 € debe ser do 10 %. Se o gasto medio diario dos turistas que pernoctan en Galiza segue unha distribución normal de media 74.24 € e desviación típica 10 €,

1. que porcentaxe de turistas poderían ser clientes deste hotel de luxo?
2. será viábel o hotel?
3. se a cadea pode eliminar servizos do hotel, que gasto mínimo diario tería ese 10 %?

Solución. Sexa $X \sim N(\mu = 74,24; \sigma = 10)$ e empreguemos a notación habitual $Z \sim N(0; 1)$. Entón,

$$P(X > 90) = P\left(\frac{X - 74,24}{10} > \frac{90 - 74,24}{10}\right) = P(Z > 1,576) \approx 0,0575. \quad (4.22)$$

Xa que logo o proxecto non é viábel dado que a porcentaxe sería de aproximadamente o 5,75%, non chegando ao 10 %.

O gasto diario mínimo é o valor z que verifica

$$P(X > z) = 0,90. \quad (4.23)$$

Dado que o cuantil 0,9 dunha $N(0;1)$ é 1,281552, temos que

$$P(X > z) = P\left(\frac{X - 74,24}{10} > \frac{z - 74,24}{10}\right) = 0,90. \quad (4.24)$$

Polo tanto

$$\frac{z - 74,24}{10} = 1,281552, \quad (4.25)$$

de onde

$$z = 74,24 + 10 \cdot 1,281552 = 87,05552 \text{ €}. \quad (4.26)$$

□

Tarefa extra 4.1. Constrúe un texto sobre as taxas turísticas estruturado en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 4.2. Logo dun tempo, os concellos non están conformes co xeito de recadar as taxas e unha serie de diferenzas importantes deriva en que para o ano seguinte cada un deles fará a recadación directamente. O [concello de Santiago de Compostela](#) decide gravar con distintas taxas as pernoctacións, dependendo do tipo de establecemento hostaleiro, tal e como fan noutras cidades no ámbito europeo. Analizan os datos de varios meses e fan unha serie de simulacións, recollendo o número de pernoctacións en función da categoría do hotel (dúas estrelas ou menos, tres estrelas, catro estrelas ou máis) e os ingresos totais que recadarían:

Mes	≤ 2 estrelas	3 estrelas	≥ 4 estrelas	Ingresos totais
Xullo	500	1.000	500	4.250 €
Agosto	8.000	8.000	4.000	38.000 €
Setembro	25.000	60.000	m	197.500 €

Non sabían canto ingresaron polos hoteis de catro estrelas ou máis, e denotaron esa cantidade por m .

1. Estuda para que valores do parámetro m podes calcular a solución (podes empregar algún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#)).
2. Cando sexa posíbel, calcula os valores das recadacións por tipo de hotel, expresando o resultado en función do parámetro m .
3. Determina para que rango de valores de m os hoteis de tres estrelas teñen taxa positiva.
4. Estuda para que valor de m o valor da taxa turística para hoteis de tres estrelas é máximo (novamente podes empregar algún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#)). Para ese valor de m , indica os valores das taxas turísticas para cada un dos tres tipos de hoteis.

Solución. Sexan

$$A = \begin{pmatrix} 500 & 1.000 & 500 \\ 8.000 & 8.000 & 4.000 \\ 25.000 & 60.000 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4.250 \\ 38.000 \\ 197.500 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Se resolvemos o sistema $AX = B$ obtemos, sempre que $m \neq 30.000$,

$$x = 1, \quad y = \frac{15m - 345.000}{4m - 120.000}, \quad z = \frac{210.000}{120.000 - 4m}. \quad (4.28)$$

Porén, se $m = 30.000$, entón o sistema resulta incompatíbel, pois o rango da matriz ampliada sempre é 3 para calquera valor de m xa que

$$\begin{vmatrix} 500 & 1.000 & 4.250 \\ 8.000 & 8.000 & 38.000 \\ 25.000 & 60.000 & 197.500 \end{vmatrix} = 21 \times 10^{10} \neq 0. \quad (4.29)$$

Posto que o valor da taxa dos hoteis de tres estrelas é

$$y = \frac{15(m - 23.000)}{4(m - 30.000)} \quad (4.30)$$

temos que m pode valer como moito 23.000 ou máis de 30.000 para termos valores positivos da taxa turística.

Finalmente, se calculamos a derivada con respecto a m do valor de y resulta

$$y'(m) = -\frac{26.250}{(m - 30.000)^2} \quad (4.31)$$

que resulta ser unha función sempre negativa. En consecuencia, $y(m)$ é unha función estritamente decrecente que atinxe o seu máximo valor para $m = 0$.

Se $m = 0$ entón temos

$$x = 1 \text{ €}, \quad y = \frac{23}{8} \text{ €}, \quad z = \frac{7}{4} \text{ €}. \quad (4.32)$$

□

Tarefa extra 4.3. Logo dun tempo, os concellos non están conformes co xeito de recadar as taxas e unha serie de diferenzas importantes deriva en que para o ano seguinte cada un deles fará a recadación directamente. O [concello de Santiago de Compostela](#) decide gravar con distintas taxas as pernoctacións, dependendo do tipo de establecemento hostaleiro, tal e como fan noutras cidades no ámbito europeo. Analizan os datos de varios meses e fan unha serie de simulacións, recollendo o número de pernoctacións en función da categoría do hotel (dúas estrelas ou menos, tres estrelas, catro estrelas ou máis) e os ingresos totais que recadarían:

Mes	≤ 2 estrelas	3 estrelas	≥ 4 estrelas	Ingresos totais
Xullo	500	1.000	500	4.250 €
Agosto	8.000	8.000	4.000	38.000 €
Setembro	25.000	60.000	15.000	197.500 €

Determina en canto fixou o concello de Santiago a taxa para cada unha das tres categorías.

Solución. Formulamos o sistema de ecuacións lineares

$$\begin{cases} 500x + 1000y + 500z = 4.250, \\ 8.000x + 8.000y + 4.000z = 38.000, \\ 25.000x + 60.000y + 15.000z = 197.500. \end{cases} \quad (4.33)$$

Equivalentemente

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} 500 & 1.000 & 500 \\ 8.000 & 8.000 & 4.000 \\ 25.000 & 60.000 & 15.000 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4.250 \\ 38.000 \\ 197.500 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

que ten por solución $x = 1$, $y = 2$, $z = 3,5$ €, respectivamente. $\square$

Tarefa extra 4.4. A análise dos ingresos (en millóns de euros) que deixa o turismo pode ser aproximado pola seguinte función que depende do tempo t medido en anos desde o ano 2020, é dicir cando $t = 0$ entón $I(t)$ dá o valor dos ingresos por turismo do ano 2020:

$$I(t) = 10 + \frac{t - 2\sqrt{2}}{\sqrt{t^2 + 4}}. \quad (4.35)$$

1. Canto foron os ingresos no ano 2020? Canto foron os ingresos no ano 2023?
2. Estuda se a función dos ingresos ten algunha monotonía.
3. Houbo algún cambio na inflexión dos ingresos?
4. Existe un valor máximo de ingresos a medida que o tempo avanza?
5. Representa graficamente os ingresos por turismo desde o ano 2020.
6. Comproba os resultados empregando algún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#).

Solución. Temos que

$$I(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} I(t) = 10 - \sqrt{2} \approx 8,58579 \text{ M euro}, \quad I(3) = 10 + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{13}} \approx 10,0476 \text{ M } \text{€}. \quad (4.36)$$

Ademais,

$$I'(t) = \frac{2(\sqrt{2}t + 2)}{(t^2 + 4)^{3/2}}. \quad (4.37)$$

Xa que logo, se analizamos o signo da derivada observamos que ten un cambio de signo no instante $t = -\sqrt{2}$ que está fóra do dominio que se analiza. Ademais, en calquera punto observamos que $I'(t) > 0$ polo que $I(t)$ é unha función monótona crecente.

Por outra banda

$$I''(t) = \frac{8\sqrt{2} - 4t(\sqrt{2}t + 3)}{(t^2 + 4)^{5/2}} \quad (4.38)$$

que se anula no punto

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (4.39)$$

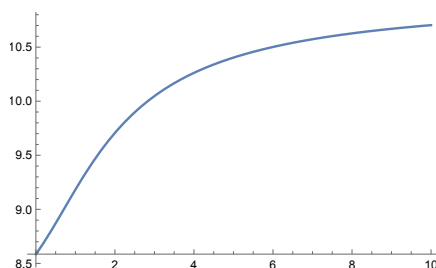
Antes dese valor temos que $I''(t) > 0$ polo que a función ten a mesma convexidade que t^2 . Despois dese valor temos que $I''(t) < 0$ polo que $I(t)$ ten a mesma concavidade que $-t^2$. Con outras palabras, nese valor temos un punto de inflexión da función $I(t)$.

Xa analizamos que a función $I'(t)$ non se anula en ningún punto do dominio onde se analiza. Ademais,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 11, \quad (4.40)$$

que é o valor da asíntota horizontal que ten a función. Posto que $I(t)$ é monótona crecente (estrita) obtemos que non atinxe ningún máximo, se ben os valores tenden a 11.

Finalmente, a gráfica da función $I(t)$ vén dada pola gráfica.



□

Tarefa extra 4.5. Desde hai pouco tempo, estase a empregar un método novidoso para determinar o número e a procedencia do turismo, baseado nos sinais de posición dos teléfonos móbiles, fornecidos polos principais operadores de telefonía. Segundo este sistema, Galiza recibiu 4 millóns de turistas procedentes de España e tivo outros 6 millóns de turistas (internos) galegos. Nestas dúas categorías, os 4 millóns de turistas procedentes de España realizaron 48 millóns de pernoctacións, fronte aos 20 millóns de pernoctacións derivadas do turismo galego. Deses 48 millóns de pernoctacións destacan 9 millóns de turistas procedentes de Madrid, 3,5 millóns de pernoctacións de Catalunya, 2,8 millóns de Castilla y León, 2,7 de Andalucía e 2,1 de Euskadi.

Na seguinte táboa recóllense os valores absolutos e a porcentaxe destes territorios no total do estado

	Absoluto	Porcentaxe
Madrid	6.871.903	14,29 %
Catalunya	7.901.963	16,43 %
Castilla y León	2.383.703	4,96 %
Andalucía	8.584.147	17,85 %
Euskadi	2.216.302	4,61 %
Galiza	2.699.424	5,84 %

Por outra banda, tamén recibimos 2,3 millóns de turistas estranxeiros, que fixeron 17 millóns de pernoctacións. Destes turistas, 780.000 foron portugueses, que pernoctaron 4,2 millóns de noites, 325.000 foron franceses con 2,7 millóns de pernoctacións. A un nivel máis baixo temos Alemaña con 165.000 turistas, Países Baixos con 131.500 turistas, Reino Unido con 130.000 turistas e Estados Unidos de América con 110.000 turistas.

Supoñamos por simplicidade, que hai independencia na elección do aloxamento e que as prazas son individuais. Nunha casa de turismo rural de 9 prazas:

1. Queren elaborar un menú baseado en produtos locais, pero non teñen claro como traducir algúns termos. Cal é a probabilidade de que os turistas sexan galegos?
2. Durante as festas do Apóstolo, a casa de turismo rural está ocupada integralmente por turistas españois. Se a distribución da casa de turismo rural é de 4, 3 e 2 prazas por cada un dos tres andares, cal é a probabilidade de que só o segundo andar estea ocupado por turistas de Madrid?

Solución. O número total de pernoctacións é: $48 + 20 + 17 = 85$ millóns de turistas. As probabilidades asociadas a que un turista sexa español, galego ou extranxeiro son: 0,5647059, 0,2352941 e 0,20, respectivamente.

Sexa o suceso

$$A = \text{todos os turistas son galegos.} \quad (4.41)$$

Usando a lei de Laplace:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \frac{\# \text{Casos favorábeis}}{\# \text{Casos posíbeis}} = \frac{V_{20000000}^9}{V_{85000000}^9} = \frac{\frac{20000000!}{(20000000-9)!}}{\frac{85000000!}{(85000000-9)!}} \\
 &= \frac{20000000}{85000000} \frac{19999999}{84999999} \cdots \frac{19999992}{84999992} = 2,210543 \times 10^{-6}. \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Dado que o tamaño é grande a aproximación supoñendo repetición daría un resultado semellante:

$$\frac{VR_{20000000}^9}{VR_{85000000}^9} = \frac{20^9}{85^9} = 2,210546 \times 10^{-6}. \quad (4.43)$$

Sexa o suceso

$$A = \text{só o segundo andar está ocupado por turistas de Madrid}. \quad (4.44)$$

En consecuencia,

$$P(A) = \frac{VR_{39000000}^6 VR_{9000000}^3}{V_{48000000}^9} = 0,001896462. \quad (4.45)$$

Analogamente e supoñendo repetición teríamos:

$$P(A) \approx \frac{VR_{39000000}^6 VR_{9000000}^3}{VR_{48000000}^9} = \frac{39^6 9^3}{48^9} = 0,001896462. \quad (4.46)$$

□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois, ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado, o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (*Influencers*) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.



Parques eólicos

Situación de aprendizaxe 5. Un aeroxerador ou xerador eólico é un dispositivo que converte a enerxía cinética do vento (fonte natural e renovábel) en electricidade. Podemos pensar que é o oposto dun ventilador, que usa electricidade para crear vento, pois o aeroxerador aproveita o vento para producir electricidade. Unha das premisas na súa construción é que canto máis alto sexa o aeroxerador, máis forte é o vento, xa que hai menos obstáculos ao seu paso. Ademais, canto máis alto é, maiores serán as aspas e maior superficie de captación de vento. Normalmente teñen tres aspas, para mellorar a estabilidade. Os primeiros aeroxeradores tiñan unhas aspas pequenas (arredor de 10 metros). Os que se fabrican na actualidade poden situarse arredor de 85 metros. Os deseños actuais están feitos para producir máis enerxía, en función da área en metros cadrados barrida polas aspas, e requiren fustes maiores que chegan a medir 120 metros.

Nesta situación comézase cun proceso de familiarización das unidades e da enerxía que pode producir un único aeroxerador. Posteriormente analízanse dous dos problemas máis importantes, xunto co retorno económico, relacionados con este tipo de instalacións: o ruído que xeran e a afectación nos ecosistemas. Finalmente, a análise da enerxía renovábel que xeramos conduce a valorar se somos ou non somos autosuficientes desde o punto de vista enerxético, e a importancia de decidir onde localizar novos parques eólicos. Preténdese que o alumnado sexa consciente das repercusións do gasto enerxético e as consecuencias a moitos niveis de decisións como a localización de parques eólicos. Como reto final debe evidenciarse un produto final: construción dun texto que se sirva da resolución das distintas tarefas e empregue os estímulos presentados para facer unha proposta de xeración de enerxía sustentábel.

Imaxe de fondo obtida de <https://www.freepik.com>

Estímulo 5.1: As persoas e as comunidades non poden vivir sen enerxía.

A enerxía existe no planeta Terra en diferentes estados e os seres humanos aproveitárona de forma diferente ao longo dos séculos. Ata finais do século XVIII case a totalidade da enerxía usada era renovábel, procedía do sol na forma de leña, vento, auga. . . . Tamén se utilizaba moita enerxía humana para facer traballos, producir produtos, subministrar servizos. A partir da xeneralización do sistema económico capitalista a principal fonte enerxética usada foron, e son, os combustíbeis fósiles. Estes adoitan a forma de petróleo, de gas natural, de carbón. . . . Iso permitiu un impresionante crecemento económico en todos os países, especialmente nos da esfera occidental. Nos últimos anos tamén outros países se sumaron a esa dinámica. Foron as economías emerxente ou [BRICS](#): Brasil, Rusia, China, India En menor medida, as chamadas economías subdesenvolvidas (a meirande parte de África, moitos países asiáticos e da América Latina) tamén comezaron a crecer fortemente nas últimas décadas.

Ese forte crecemento económico alcanzado por medio dos combustíbeis fósiles, e as tecnoloxías asociadas, mellorou a calidade de vida pero trouxo tamén problemas ambientais. O principal é a aceleración do cambio climático por unha excesiva emisión á atmosfera dos chamados gases do efecto invernadoiro.

Para loitar contra ese grave problema ambiental, algúns acordos internacionais (como o [Protocolo de Kyoto](#), o [Acordo de París](#) e o [Pacto Verde Europeo](#)) e moitos plans e programas dos Estados membros da Unión Europea (como o PNIEC en España) así como nas diferentes Comunidades Autónomas ([Estratexia Galega de cambio climático e enerxía 2050](#)) establecen acordos, obxectivos e medidas de política económica, enerxética e ambiental para reducir as emisións de CO₂. Entre as medidas que se establecen figura o avance das enerxías renovábeis para producir electricidade.

Desa forma, ese tipo de fontes enerxéticas comezaron a espallarse de forma acelerada en Europa, en España e en Galiza. O mesmo ocorreu en moitos outros países. No caso galego, desde principios de século XX comezaron a avanzar os aproveitamentos hidráulicos, moi acelerados entre os anos corenta e setenta desa mesma centuria. A enerxía fotovoltaica ten un desenvolvemento moi incipiente nos últimos anos. E desde finais dos anos noventa do século pasado, a enerxía eólica non deixou de crecer. No ano 2019 a potencia eólica instalada superou por primeira vez a gran hidráulica (encoros de máis de 10 MW). Na actualidade pouco máis de 4.000 MW están instalados en parques eólicos espallados por todo o territorio galego, todos eles en terras de concellos rurais. As vantaxes de producir electricidade coa forza do vento, da auga ou do sol son moitas. Son de natureza ambiental, pois son moito máis respectuosas coa natureza. Son sociais e económicos, pois ao seren plantas relativamente pequenas pode haber beneficios espallados polo territorio, como empregos directos e indirectos. E son estratéxicos, ou políticos, pois un país que dependa deses recursos naturais non sufrirá presión ou perturbacións externas que se producen cando son poucos os produtores de enerxía e esta está concentrada, como ocorreu agora cos combustíbeis fósiles. Tamén se poden producir problemas co seu desenvolvemento. Se o parecer da cidadanía local non é considerado, pódese rebelar contra a súa instalación. Se son instalados en ecosistemas con alto valor ambiental, pódense xerar estragos neses bens ambientais. Se son colocados moi cerca dos lugares habitados, ou en paisaxes sensíbeis, pódense producir problemas para as persoas. As néboas que causan os grandes encoros poden ser un problema. Outro pode vir derivado da proximidade dos grandes aeroxeradores ás casas habitadas.

Texto de **Xavier Simón Fernández**, Catedrático de Economía Aplicada na [Universidade de Vigo](#) e membro do [Centro de Investigación Interuniversitario das Paisaxes Atlánticas Culturais \(CISPAC\)](#).

Estímulo 5.2: Viñeta de Xosé Lois González Vázquez, “o Carrabouxo”, publicada no xornal *La Región*



<https://carrabouxo.es/2021/06/25/carra24-6-21/>

Estímulo 5.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, “o Bichero”, publicada no xornal *Faro de Vigo*



<http://obichero.blogspot.com/2008/12/concurso-elico.html>

Estímulo 5.4: Viñeta de Pablo Prado “Fuco” no xornal *Novas do Eixo Atlántico*



<https://www.novasdoeixoatlantico.com/chas-carras-chas-enerxia-eolica/>

Tarefa 5.1. Tempo estimado para a resolución: 25 minutos. Chegamos a un parque eólico onde hai distintos elementos xa instalados, que producen unha cantidade distinta de enerxía en función das 8.760 horas que ten un ano. Temos aerogeradores de tres tipos que xeran distintas cantidades anuais de enerxía. Analizando os datos dos últimos anos sabemos que no ano 2021 funcionaron correctamente 10, 20 e 5 aerogeradores, respectivamente, xerando 155.500 MWh. No ano 2022 puxeron en funcionamento novos xeradores e deixaron de reparar algún do tipo 3, quedando 12, 25 e 2 aerogeradores, respectivamente, que xeraron 177.000 MWh. Finalmente, no ano 2023 chegaron 5 xeradores máis do tipo 1, pero non teñen clara cal foi a produción dos parques.

1. Averigua canto produce cada tipo de aerogeradores (podes empregar algún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#)).
2. Que rango de valores da produción do ano 2023 é posíbel?
3. Cales son, no ano 2023, os valores mínimo e máximo da suma das producións dos tres tipos de aerogeradores?

Solución. (1) Formulamos o sistema de ecuacións

$$\begin{cases} 10E_1 + 20E_2 + 5E_3 = 155.500, \\ 12E_1 + 25E_2 + 2E_3 = 177.000, \\ 17E_1 + 25E_2 + 2E_3 = m. \end{cases} \quad (5.1)$$

Sexan

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 12 & 25 & 2 \\ 17 & 25 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 155.500 \\ 177.000 \\ m \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Se resolvemos o sistema $AX = B$ resulta

$$E_1 = \frac{1}{5}(m - 177.000) \text{ MWh/ano}, \quad E_2 = \frac{8}{85}(248.750 - m) \text{ MWh/ano}, \quad (5.3)$$

$$E_3 = \frac{2}{85}(350.750 - m) \text{ MWh/ano}. \quad (5.4)$$

(2) Posto que a produción debe ofrecer valores non negativos, temos as seguintes desigualdades para o parámetro m :

$$m \geq 177.000, \quad m \leq 248.750, \quad m \leq 350.750. \quad (5.5)$$

En consecuencia, o rango posíbel para o parámetro m é

$$m \in [177.000, 248.750]. \quad (5.6)$$

(3) Temos que a suma das producións vén dada por

$$\frac{1}{5}(m - 177.000) + \frac{8}{85}(248.750 - m) + \frac{2}{85}(350.750 - m) = \frac{1}{85}(7m - 317.500) = P(m). \quad (5.7)$$

Trátase dunha función linear crecente, polo que o valor mínimo atinxirase en $m = 177.000$ e o valor máximo en $m = 248.750$.

$$\min P(m) = P(177.000) = 10.841,2 \text{ MWh/ano}, \quad (5.8)$$

$$\max P(m) = P(248.750) = 16.750 \text{ MWh/ano}. \quad (5.9)$$

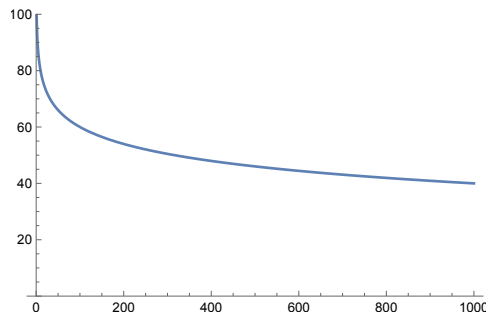
□

Tarefa 5.2. Tempo estimado para a resolución: 20 minutos. Un dos problemas que hai que resolver para a instalación dun parque eólico é a distancia ás casas que xa existen na maioría dos nosos montes, relacionado co estímulo 5.1. En particular, un dos problemas que xorden é o ruído permanente e constante que emiten, que pode ser molesto polo día, e pola noite causar grandes trastornos no sono. Para resolver esta cuestión empregamos algunhas simplificacións de como se propaga un son, no noso caso a través dun medio que consideraremos homoxéneo como é o ar. As ondas esténdense uniformemente en todas as direccións, diminuindo a amplitude a medida que estamos máis lonxe da fonte xeradora do ruído, de xeito semellante ao que se pode observar se guindamos unha pedra a un estanque de auga. Se medimos a intensidade do son nun punto a unha distancia x entre un e mil metros do aeróxerador temos

$$R(x) = 100 - 20 \log_{10}(x) \text{ dB}. \quad (5.10)$$

1. O ruído aumenta ou diminúe cando nos afastamos do aerixerador?
2. A que distancia do aerixerador se produce o máximo ruído?
3. Representa graficamente a aproximación da función ruído no seu dominio de definición.
4. O valor máximo permitido para unha discoteca é de aproximadamente 60dB pola noite. Se a normativa di que o ruído nas vivendas non pode superar os 45 dB, cal é a distancia mínima entre as vivendas e un aerixerador?
5. Xustifica se a estimación do ruído $R(x)$ é ou non é válida para distancias moi grandes? E para valores moi pequenos e moito menores dun metro? Comproba os teus razoamentos empregando algún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#).

Solución. A representación da función do ruído en termos da distancia ao aerixerador entre un e mil metros é



Se calculamos a derivada da función $R(x)$ temos que

$$R'(x) = -\frac{20}{x \log_e(10)} < 0 \quad (5.11)$$

polo que a función $R(x)$ é monótona decrecente en todo o seu dominio de definición. Isto implica que a función $R(x)$ atinxe o seu valor máximo no punto $x = 1$ resultando $R(1) = 100$ dB.

Para determinar a que distancia o valor é de 45 dB, temos que resolver

$$45 = 100 - 20 \log_{10}(x) , \quad (5.12)$$

ou equivalentemente

$$55 = 20 \log_{10}(x) \quad (5.13)$$

de onde

$$\log_{10}(x) = \frac{55}{20} \quad (5.14)$$

polo que

$$x \approx 562,341 \text{ metros.} \quad (5.15)$$

Se calculamos o límite cando $x \rightarrow \infty$ para determinar se a estimación pode ser válida para valores de x moi grandes temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 100 - 20 \log_{10}(x) = -\infty, \quad (5.16)$$

de xeito que a estimación non é correcta pois implicaría valores negativos de ruído a partir dunha determinada distancia (que se pode calcular e son 100.000 metros).

A medida que x está entre 0 e 1 metros, se calculamos o límite cando $x \rightarrow 0$ da función estimación do ruído temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} R(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 100 - 20 \log_{10}(x) = +\infty, \quad (5.17)$$

que, novamente, non é realista.

□

Tarefa 5.3. Tempo estimado para a resolución: 15 minutos. Ao afectaren ao ecosistema natural dunha determinada zona, as mancomunidades de montes consideran que os alugueiros por instalar parques eólicos deben tamén compensar os múltiples danos ambientais, como a afectación da águia real ou plantas como a *centaurea ultreiae*, flor endémica ameazada polos parques eólicos. A loita contra determinados intereses ás veces pretende semellar que as persoas que cuestionan as localizacións dalgúns parques eólicos son auténticos Quixotes, co obxecto de desvirtuar o traballo que fan, como se desprende dos estímulos 5.2 e 5.3:

Nisto descubriron trinta ou corenta muíños de vento que hai naquel campo e, en canto os viu don Quixote, díxolle ao seu escudeiro:

A ventura vai guiando as nosas cousas mellor do que nos gustaría; porque alí ves, amigo Sancho Panza, onde se descubren trinta, ou uns cantos máis, desaforados xigantes, cos que penso facer batalla e quitarlles a todos as vidas, con cujos restos comezaremos a enriquecernos; que esta é unha boa guerra, e é un gran servizo de Deus quitar tan mala semente da faz da terra.

- *Que xigantes?, dixo Sancho Panza.*
- *Os que alí ves, respondeu o seu amo, con longos brazos, que os adoitan ter algúns de case dúas leguas.*
- *Mire, señoría —respondeu Sancho—, que os que parecen non son xigantes senón muíños de vento e o que semellan armas sobre eles son as aspas que, xiradas polo vento, fan mover a moa. Aínda que pareza incríbel, nesta versión da historia, Don Quixote era un gran coñecedor da xeometría e localizou unha fila de muíños de ventos na recta*

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, \quad (5.18)$$

polo que decidiu seguir montado en Rocinante a traxectoria descrita pola recta

$$s : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}, \quad (5.19)$$

mentres Sancho Panza lle dicía que non acometese desigual batalla.

1. Estuda se nesta versión da historia Don Quixote leva unha boa traxectoria para impactar coa fila de muíños de vento.
2. Se a traxectoria é boa, calcula o punto de encontro entre D. Quixote e a fila dos aeroxeradores. Se é errónea, determina a mínima distancia á que se atopará D. Quixote na súa acometida aos aeroxeradores.

Solución. A idea do enunciado xa a apuntou o humorista gráfico Xosé Lois nunha das súas viñetas d'O Carrabouxo <https://carrabouxo.es/2021/09/09/carra8-9-21/>



Antes de comezar a resolución consideramos acaído suxerir ao alumnado unha pe-

quena lectura sobre as traducións da obra de [Miguel de Cervantes Saavedra](#) para o galego: <https://academia.gal/-/o-primeiro-quixote-en-galego> ou mesmo para o portugués: <https://books.openedition.org/pumi/3291>. Sinalamos tamén que a tradución do texto no enunciado foi feita polos autores deste libro.

Das ecuacións dadas para as rectas r e s temos os seguintes puntos en cada unha delas

$$P_r = (1, 3, -1), \quad Q_s = (0, -1, 1). \quad (5.20)$$

Xa que logo, podemos calcular o vector $\overrightarrow{P_r Q_s}$ mediante

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -1, 1) - (1, 3, -1) = (-1, -4, 2). \quad (5.21)$$

Ademais, os vectores directores das dúas rectas son

$$\vec{v}_r = (2, 1, -2), \quad \vec{w}_s = (-2, 1, 2). \quad (5.22)$$

Se agora calculamos o determinante

$$\det(\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{v}_r, \vec{w}_s) = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad (5.23)$$

polo que temos que as rectas se cruzan e a traxectoria calculada por Don Quixote é errónea.

Ademais, xa que

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{k} = (4, 0, 4), \quad (5.24)$$

que ten por módulo

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = |(4, 0, 4)| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}. \quad (5.25)$$

Finalmente, temos que a distancia entre as dúas rectas é

$$d(r, s) = \frac{\det(\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{v}_r, \vec{w}_s)}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (5.26)$$

□

Tarefa 5.4. Tempo estimado para a resolución: 15 minutos. Cando a velocidade do vento é alta, as pas flexan e poden bater coa torre. Por motivos de seguridade con velocidades do vento superiores a 60km/h comezan a monitorizar as velocidades do vento por se fose necesario parar o aerogenerador. Nun determinado parque eólico, á altura do rotor, a velocidade do vento distribúese segundo unha distribución normal $N(\mu = 30; \sigma = 15)$. Elixidos días ao azar:

1. Cal é a probabilidade de que non haxa que monitorizar ningún día nunha semana?
2. Cal é a probabilidade de que haxa que monitorizar todos os días nunha semana?
3. Cal é a probabilidade de que haxa que monitorizar menos de 30 días nun ano non bisesto?

Solución. Consideremos a variábel aleatoria

$$V = \text{velocidade do vento}, \quad (5.27)$$

que podemos aproximar por unha normal $N(\mu = 30; \sigma = 15)$. A probabilidade de ter que monitorizar o aerogenerador é:

$$P(V > 60) = P\left(\frac{V - 30}{15} > \frac{60 - 30}{15}\right) = P(Z > 2) = 0,02275013. \quad (5.28)$$

Sexa a variábel

$$X_7 = \text{número de días que se apaga o aerogenerador de 7} \quad (5.29)$$

que segue unha distribución binomial $B(n=7; p=0,02275013)$. Entón

$$P(X_7 = 0) = \binom{7}{0} 0,02275013^0 (1 - 0,02275013)^7 = 0,8512152. \quad (5.30)$$

Para calcular a probabilidade de que haxa que monitorizar todos os días nunha semana facemos

$$P(X_7 = 7) = \binom{7}{7} 0,02275013^7 (1 - 0,02275013)^0 = 0,0000315419. \quad (5.31)$$

Consideremos agora a variábel

$$X_{365} = \text{número de días que se monitoriza o aerogenerador de 365 días.} \quad (5.32)$$

Teríamos unha distribución binomial $B(n=365; p=0,02275013)$. Posto que

$$n = 365 \geq 30, \quad np = 8,303798 > 5, \quad nq = n(1-p) = 356,6962 > 5, \quad (5.33)$$

podemos aproximar a binomial anterior por unha distribución normal, é dicir

$$\begin{aligned} X_{365} &\sim B(n = 365; p = 0,02275013) \\ &\approx \tilde{X} \sim N(np = 8,303798; \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{8,114885}). \end{aligned} \quad (5.34)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} P(X_{365} < 30) &\approx P(\tilde{X} < 30 - 0,5) = P\left(\frac{\tilde{X} - 8,303798}{2,848664} < \frac{29,5 - 8,303798}{2,848664}\right) \\ &= P(Z < 26,58502) \approx 1,0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

□

Tarefa extra 5.1. Constrúe un texto sobre os parques eólicos estruturado en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 5.2. Retomamos os problemas sinalados na tarefa 5.2. Para o primeiro problema, un grupo de investigadoras da [Universidade de Vigo](#) comezou a deseñar unha serie de luces para que as aves non se dirixan contra os aeroxeradores. Comezaron con proxeccións paralelas desde o propio pé do aeroxerador, pero non conseguían resolver os problemas coa rotación na parte superior das aspas. Por iso pensaron en proxectar luces desde os distintos aeroxeradores que se cruzasen entre elas para maximizar o espazo no que non voarían as aves. Colocan as luces nos rotores onde engarzan as tres pas do aeroxerador.

Nun primeiro aeroxerador que ten o rotor no punto $(2, 3, -1)$ colocan unha luz na dirección $(2, 1, -2)$. Noutro aeroxerador situado no punto $(-1, 0, 1)$ colocan outra luz apuntando na dirección $(-2, 1, m)$, onde $m \neq 0$. Estuda, en función do valor de m , se estas rectas cumpren a condición de que se crucen. Determina o valor de m para o cal a distancia entre as dúas luces emitidas é máxima.

Solución. Sexan

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, \quad s : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{m}. \quad (5.36)$$

Denotamos

$$P_r = (2, 3, -1), \quad Q_s = (-1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_r Q_s} = (-3, -3, 2), \quad (5.37)$$

$$\vec{v}_r = (2, 1, -2), \quad \vec{v}_s = (-2, 1, m). \quad (5.38)$$

Temos entón

$$\det(\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & m \end{vmatrix} = 3m - 10. \quad (5.39)$$

Para $m \neq 10/3$ podemos calcular a distancia entre as dúas rectas:

$$d(r, s) = \frac{|3m - 10|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}. \quad (5.40)$$

Calculamos entón

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & m \end{vmatrix} = (2 + m, 4 - 2m, 4), \quad (5.41)$$

que ten por módulo

$$\sqrt{36 - 12m + 5m^2}. \quad (5.42)$$

Xa que logo, temos que maximizar

$$F(m) = \frac{|3m - 10|}{\sqrt{36 - 12m + 5m^2}}. \quad (5.43)$$

Podemos maximizar o cadrado da función ou a propia función. Neste caso, analizamos directamente a función para o cal temos que dividir o numerador en dúas rexións. Posto que a función valor absoluto non é derivábel temos que analizar dous casos, cando $m > 10/3$ e cando $m < 10/3$. No primeiro caso,

$$F_1(m) = \frac{3m - 10}{\sqrt{36 - 12m + 5m^2}}, \quad (5.44)$$

ten por derivada con respecto a m

$$F'_1(m) = \frac{32m + 48}{(m(5m - 12) + 36)^{3/2}}, \quad (5.45)$$

que se anula no punto $m = -3/2$ que non interesa pois $m > 10/3$.

Por outra banda, se $m < 10/3$ temos

$$F_2(m) = \frac{10 - 3m}{\sqrt{36 - 12m + 5m^2}}, \quad (5.46)$$

con derivada

$$F'_2(m) = -\frac{16(2m+3)}{(m(5m-12)+36)^{3/2}}. \quad (5.47)$$

Temos que $F'_2(m) = 0$ no punto $m = -3/2$. Analizando o signo da derivada antes e despois do posíbel extremo, temos que nese punto hai un máximo relativo. $\square$

Tarefa extra 5.3. Retomamos novamente os problemas sinalados na tarefa 5.2. Un grupo de investigadoras da [Universidade de Vigo](#) comezou a deseñar unha serie de luces para que as aves non se dirixan contra os aeroxeradores. Deciden empregar luces emitidas desde os rotores dos aeroxeradores e receptores nos outros aeroxeradores, tamén nos rotores, para que, no caso de que algún paxaro cruce a dita luz emita un son disuasorio. É fundamental que as luces, que veñen determinadas por rectas, non intersequen para evitar ter son disuasorio permanente.

Temos tres rectas das luces emitidas e recibidas entre tres aeroxeradores dadas polas ecuacións

$$r : \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad s : \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{2}, \quad (5.48)$$

$$t : \frac{x-2}{m} = y-2 = \frac{z-1}{-3}, \quad (5.49)$$

onde temos un parámetro m libre que permite orientar as rectas s e t .

1. Determina os valores de m para que dúas calquera destas rectas se crucen.
2. Determinamos unha función de distancia como a suma dos cadrados da distancia entre as rectas r e s e a distancia entre as rectas s e t . Coa axuda dalgún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#), determina $m \geq 0$ para maximizar e minimizar esta función de distancia.

Solución. (1) Sexan

$$P_r = (4, 1, -2), \quad P_s = (1, -2, 8), \quad P_t = (2, 2, 1), \quad (5.50)$$

$$\vec{v}_r = (2, -1, 3), \quad \vec{v}_s = (m, -2, 2), \quad \vec{v}_t = (m, 1, -3), \quad (5.51)$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -3, 10), \quad \overrightarrow{P_s P_t} = (1, 4, -7), \quad \overrightarrow{P_r P_t} = (-2, 1, 3). \quad (5.52)$$

Temos entón, por unha banda entre r e s :

$$\det[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = -40 + m, \quad (5.53)$$

por outra entre s e t :

$$\det[\overrightarrow{P_s P_t}, \vec{v}_s, \vec{v}_t] = 4 - m, \quad (5.54)$$

e finalmente entre r e t :

$$\det[\overrightarrow{P_r P_t}, \vec{v}_r, \vec{v}_t] = 12 + 6m. \quad (5.55)$$

Xa que logo,

1. Se $m \neq 40$ temos que se cruzan as rectas r e s .
2. Se $m \neq 4$ temos que se cruzan as rectas s e t .
3. Se $m \neq -2$ temos que se cruzan as rectas r e t .

Polo tanto, se $m \neq -2, 4, 40$ temos que se cruzan os tres posíbeis pares de rectas dadas.

(2) Calculamos en primeiro lugar a distancia entre as rectas r e s mediante

$$d(r, s) = \frac{|\det[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|m - 40|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}. \quad (5.56)$$

Posto que

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ m & -2 & 2 \end{vmatrix} = (4, 3m - 4, m - 4), \quad (5.57)$$

temos que

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{16 + (m - 4)^2 + (3m - 4)^2} = \sqrt{48 - 32m + 10m^2}, \quad (5.58)$$

de onde

$$d(r, s) = \frac{|m - 40|}{\sqrt{48 - 32m + 10m^2}}. \quad (5.59)$$

Convén observar que as raíces do denominador son complexas.

Calculamos agora a distancia entre a recta s e a recta t empregando novamente

$$d(s, t) = \frac{|\det[\overrightarrow{P_s P_t}, \vec{v}_s, \vec{v}_t]|}{|\vec{v}_s \times \vec{v}_t|} = \frac{|4 - m|}{|\vec{v}_s \times \vec{v}_t|}. \quad (5.60)$$

Neste segundo caso

$$\vec{v}_s \times \vec{v}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & -2 & 2 \\ m & 1 & -3 \end{vmatrix} = (4, 5m, 3m), \quad (5.61)$$

polo que

$$|\vec{v}_s \times \vec{v}_t| = \sqrt{34m^2 + 16}. \quad (5.62)$$

Entón

$$d(s, t) = \frac{|4 - m|}{\sqrt{34m^2 + 16}}, \quad (5.63)$$

onde novamente o denominador non ten raíces reais.

A función obxectivo neste caso é

$$O(m) = \frac{(4 - m)^2}{34m^2 + 16} + \frac{(40 - m)^2}{10m^2 - 32m + 48}, \quad (5.64)$$

que ten por derivada

$$O'(m) = -\frac{68m(4 - m)^2}{(34m^2 + 16)^2} - \frac{2(4 - m)}{34m^2 + 16} - \frac{2(40 - m)}{10m^2 - 32m + 48} - \frac{(40 - m)^2(20m - 32)}{(10m^2 - 32m + 48)^2}. \quad (5.65)$$

Se queremos resolver $O'(m) = 0$ temos que determinar as raíces do polinomio de sexto grao

$$p(m) = 4 \left(14297m^6 - 580636m^5 + 887288m^4 - 586880m^3 + 864704m^2 - 159488m + 184832 \right), \quad (5.66)$$

que están fóra dos obxectivos da materia. Coa axuda de Geogebra podemos determinar que ten unicamente dúas raíces reais (polo tanto, ten catro raíces complexas) nos puntos

$$m_1 = 1,53964, \quad m_2 = 39,049. \quad (5.67)$$

Se consideramos un valor de m menor que m_1 , p. ex. $m = 0$ temos que $O'(m) > 0$. Se consideramos un valor de m entre m_1 e m_2 temos que $O'(m) < 0$. Polo tanto, no punto m_1 a función $O(m)$ presenta un máximo relativo.

Se agora consideramos un punto m maior que m_2 resulta que $O'(m)$ é positiva novamente, polo que nese punto m_2 a función $O(m)$ presenta un mínimo relativo.

No máximo relativo a distancia é de 65,9911, mentres que no mínimo relativo a distancia é de 0,023751. Ademais, no intervalo $[0, m_1]$ a función $O(m)$ é crecente, polo que calculamos $O(0) = 103/3 \approx 34,333$, polo que o mínimo relativo é tamén absoluto. Posto que m pode medrar indefinidamente é claro que $O(m)$ tende a $+\infty$ cando $m \rightarrow +\infty$ de xeito que o máximo relativo só é relativo e non é absoluto. $\square$

Tarefa extra 5.4. Despois de moitas observacións coa axuda dun dron deseñado pola [Escola de Enxeñaría Aeronáutica e do Espazo](#) da [Universidade de Vigo](#), se o aeroxerador está na orixe do sistema de referencia, as proxeccións sobre o plano $z = 0$ das traxectorias dos paxaros ao achegarse a un aeroxerador seguen un patrón moi interesante: a distancia ao punto $A(4,0)$ é o dobre da súa distancia á recta $x = 1$.

1. Determina o lugar xeométrico que describe as curvas dos paxaros.
2. Que tipo de traxectoria describen?

Solución. Temos que formular como ecuación

$$d(P, A) = 2d(P, r) \quad (5.68)$$

onde $P = (x, y)$ é o punto que sinala a proxección no plano $z = 0$ da traxectoria do paxaro, $A = (4, 0)$ e a recta r ten por ecuación $x = 1$.

Temos entón por unha banda

$$d(P, A) = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 0)^2}, \quad (5.69)$$

e pola outra

$$d(P, r) = \frac{|x - 1|}{1}. \quad (5.70)$$

Polo tanto, se igualamos, resulta

$$\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 2|x - 1|, \quad (5.71)$$

polo que elevando ao cadrado

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4(x - 1)^2, \quad (5.72)$$

de onde

$$12 - 3x^2 + y^2 = 0. \quad (5.73)$$

Podemos expresar a anterior ecuación como

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, \quad (5.74)$$

é dicir, os paxaros seguen unha hipérbole.

□

Tarefa extra 5.5. Tempo despois deciden colocar un sistema de detección por radar dos paxaros. Ao traballar con radares temos que reconstruír un sinal continuo limitado en banda a partir de mostras dese sinal espaciadas uniformemente. Para iso, como xa sinalou Phillip M. Woodward no ano 1953, cómpre estudar a denominada función *sinc* https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function, que podemos definir mediante

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad (5.75)$$

1. Estuda a continuidade da función $\text{sinc}(x)$ no seu dominio de definición.
2. Estuda a derivabilidade da función $\text{sinc}(x)$ no seu dominio de definición. Determina, se é posíbel calcular a recta tanxente á función $\text{sinc}(x)$ no punto $a = 0$.
3. Estuda se a función $\text{sinc}(x)$ é cóncava ou convexa nunha veciñanza do punto $a = 0$.

Solución. (1) Temos, por unha banda, que a función $\text{sinc}(x)$ é continua en todo $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ por ser composición e cociente de aplicacións continuas onde o denominador non se anula. Ademais, no punto $a = 0$ temos que, empregando a definición, $\text{sinc}(0) = 1$ e por outra banda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sinc}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0}. \quad (5.76)$$

É posíbel resolver a indeterminación de moitos xeitos. Por unha banda, sabemos da materia de Física, ao analizar o movemento dun péndulo, que para ángulos pequenos $\text{sen}(x) \approx x$ polo que o límite do cociente é 1. Outro xeito de resolver é empregar a regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1. \quad (5.77)$$

Polo tanto, xa que coinciden o valor da función no punto $a = 0$ co valor do límite cando $x \rightarrow 0$, temos que a función é continua nese punto.

(2) Para analizar a derivabilidade, derivamos en primeiro lugar fóra do punto $a = 0$, empregando as regras habituais de derivación. É dicir, se $x \neq 0$ temos que

$$\text{sinc}'(x) = \frac{\cos(x)x - \text{sen}(x)}{x^2}. \quad (5.78)$$

Para calcular a derivada da función $\text{sinc}(x)$ no punto $a = 0$ xa que a función cambia de xeito de estar definida nunha veciñanza dese punto, temos que empregar a definición de derivada:

$$\text{sinc}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sinc}(0+h) - \text{sinc}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sinc}(h) - 1}{h}. \quad (5.79)$$

Cando $h \rightarrow 0$ entón $h \neq 0$ polo que a función $\text{sinc}(h)$ vén dada polo cociente $\text{sen}(h)/h$. Ao substituír resulta

$$\text{sinc}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(h)}{h} - 1}{h}. \quad (5.80)$$

O numerador da anterior fracción tende a 0 polo visto na análise da continuidade; tamén tende a cero de xeito obvio o denominador. Podemos expresar o límite destoutro xeito

$$\text{sinc}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h) - h}{h^2} = \frac{0}{0}. \quad (5.81)$$

Se aplicamos a regra de L'Hôpital resulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{2h} = \frac{0}{0}. \quad (5.82)$$

Aplicando novamente a regra de L'Hôpital obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h) - 0}{2} = 0. \quad (5.83)$$

Polo tanto, $\text{sinc}'(0) = 0$. Xa que $\text{sinc}(0) = 1$ temos que a ecuación da recta tanxente é $y = 1 + 0x = 1$.

(3) Para analizar se a función é cóncava ou convexa nunha veciñanza do punto $a = 0$ temos que calcular a derivada segunda da función $\text{sinc}(x)$ no dito punto. Posto que

$$\text{sinc}'(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)x - \text{sen}(x)}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (5.84)$$

Xa que a función $\text{sinc}'(x)$ cambia de forma de estar definida cerca do punto $a = 0$ temos que empregar a definición de derivada, e ter en conta que a derivada segunda dunha función nun punto non é máis que a derivada da derivada primeira da función:

$$\text{sinc}''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sinc}'(h) - \text{sinc}'(0)}{h}. \quad (5.85)$$

Empregamos agora que ao tender $h \rightarrow 0$ temos que $h \neq 0$ para substituír $\text{sinc}'(h)$, e posto que xa temos calculado antes que $\text{sinc}'(0) = 0$ obtemos

$$\text{sinc}''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(h)h - \text{sen}(h)}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h)h - \text{sen}(h)}{h^3} = \frac{0}{0}. \quad (5.86)$$

Empregamos a regra de L'Hôpital para resolver a indeterminación,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(h)h - \cos(h) + \cos(h)}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(h)h}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(h)}{3h} = \frac{-1}{3}, \quad (5.87)$$

onde no último límite empregamos que cando $h \rightarrow 0$ temos que $\sin(h) \approx h$. En consecuencia,

$$\text{sinc}''(0) = \frac{-1}{3} < 0, \quad (5.88)$$

polo que a función ten a mesma convexidade que $-x^2$.

□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois, ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado, o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (*Influencers*) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.

Tempos de estudo e de lecer

Situación de aprendizaxe 6. Durante o período educativo desde a escola infantil ata segundo de bacharelato o tempo de estudo vai medrando, do mesmo xeito que o tempo para lecer vai diminuindo. Un dos problemas que atopa actualmente a mocidade é como conseguir optimizar o seu tempo libre, ademais de poder dispor de tempo libre seguido e de mellor calidade. Posibelmente conviría reformular o calendario escolar xa desde idades temperás, se ben isto tivese implicacións na conciliación das familias. Nesta situación de aprendizaxe preténdese analizar distintas cuestións relacionadas co tempo de lecer e co tempo de estudo, moi particularmente no alumnado de segundo de bacharelato e tamén para o profesorado que imparte materias nese curso.

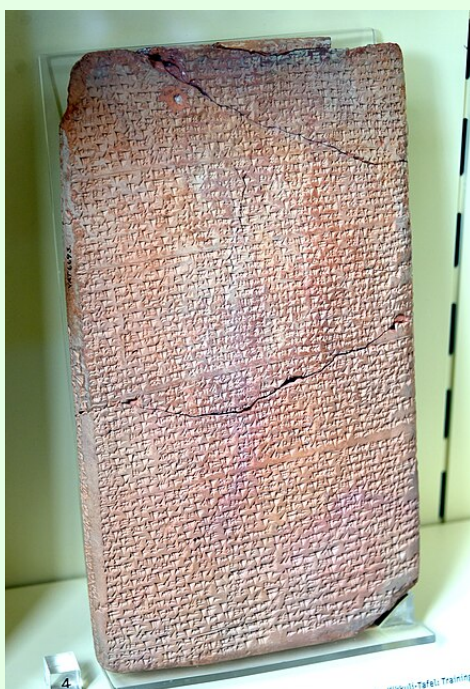
No ámbito do deporte está máis que estudada a necesidade do descanso para mellorar o rendemento nos adestramentos e na competición, tal e como se recolle no primeiro estímulo. Como reto, o alumnado debe elaborar unha proposta de organización escolar, para a que construíra un texto servíndose da resolución das distintas tarefas e da información achegada nos estímulos para apoiar a súa argumentación.

Imaxe de fondo obtida de <https://www.freepik.com>

Estímulo 6.1: A necesidade de descanso.

O descanso é unha necesidade inherente ao ser humano. Non é posible física nin fisioloxicamente manter unha actividade non basal durante un período de tempo indefinido, xa que esta actividade provocará un estado paulatino de fatiga que finalmente nos obrigará, aínda que non o queiramos, ao descanso necesario.

Esta necesidade foi entendida e atendida dende os primeiros textos escritos en que se dilucida certa coherencia na súa escrita. Como exemplo, resulta moi ilustrativo que un libro escrito arredor do ano 1400 a.C. abordase a necesidade de descansar dun xeito tan exacto, con tanto rigor e detalle. O libro en cuestión é *Hittite Horse Training* escrito en lingua [lingua hitita](#) por [Kikkuli](#), un adestrador de cabalos. O texto, escrito en [táboas cuneiformes](#), foi descuberto a comezos do século XX, é dicir, nada menos que 3.300 anos despois de ser escrito. Para o pobo hitita, o cabalo e o carro de guerra do que tiraba eran esenciais para a súa supervivencia e, polo tanto, recibían a máxima atención e coidado.



Imaxe tomada da entrada na Wikipedia sobre [Kikkuli](#).

Hoxe, estas táboas cuneiformes consérvanse nos [Staatlichen Museen zu Berlin](#) (Museos Estatais de Berlín), no [İstanbul Arkeoloji Müzesi](#) (Museo Arqueolóxico de Istambul), e no [Anadolu Medeniyetleri Müzesi](#) (Museo das Civilizacións de Anatolia) en Ankara, e foron traducidas a varias linguas. Por outra banda, aínda que non está relacionado co problema que se aborda neste texto, si que é relevante pensar nos milleiros de pezas de museos saqueadas dos territorios onde foron achadas.

Kikkuli detallaba un completo programa, case anual, que incluía dende esforzos de alta intensidade (galope), realizados en fraccións, ata o descanso e coidados necesarios coma o lavado con auga morna ou alimentación con avea, cebada e feo, despois dunha intensa actividade ou con altas temperaturas. Estes métodos son moi similares aos que se usan hoxe en día con deportistas de alto nivel que precisan programar de forma metódica e rigorosa o seu tempo de esforzo e, por suposto, o seu tempo de descanso. Podemos lembrar futbolistas de alto nivel que despois de cada partido ou adestramento poñen a súa musculatura en cubos con xeo, ou mesmo as reiteradas protestas das e dos profesionais por teren demasiados partidos nunha tempada polas sobrecargas que xeran e o conseguente incremento de lesións.

Hoxe en día, a estes coñecementos transmitidos dende a máis remota antigüidade, sumámoslles os coñecementos derivados da ciencia máis actual que deu pautas moi concretas sobre como tomar un descanso que garanta a recuperación do cansazo de cara a ter maior enerxía para realizar traballos, estudos e mesmo actividades de lecer. A consecución de determinados hábitos fará que poidamos dispor de sono profundo. Por exemplo, realizar exercicio físico regularmente, adiantar a hora da cea ou desconectarnos do uso de dispositivos electrónicos como tabletas, teléfonos e ordenadores dúas horas antes de durmir, mellorará a calidade do sono e permitirá reducir o tempo que tardamos en durmir.

O descanso é tan importante que a administración estableceu normas obrigatorias no lugar de traballo, xa que repercute directamente na produtividade. Por exemplo, os descansos de 15 minutos cada determinado número de horas de traballo, ou o número mínimo de horas de descanso necesarias entre unha quenda de traballo e outra, non só inflúen na produtividade senón que reducen o risco de sufrir un accidente laboral.

Desde hai anos, coa entrada do Espazo Europeo do Ensino Superior, na universidade considérase que as e os estudantes son persoas traballadoras a tempo completo, que deben ter unha xornada de 40 horas semanais, de xeito que se distribúen esas horas entre docencia presencial e o tempo necesario para o estudo. Xa que logo, é posible que exista un tempo para o descanso, para o lecer, para a práctica deportiva, para tocar un instrumento musical, para dedicalo á danza ou ao baile, ou para simplemente estar coas amizades.

Máis de 3.400 anos despois do libro de Kikkuli non debemos comportarnos como bestas e cómpre aprender a descansar, tanto o corpo como a mente.

Texto de **Óscar García García**, Decano da [Facultade de Ciencias da Educación e do Deporte](#) do campus de Pontevedra da [Universidade de Vigo](#).

Estímulo 6.2: Viñeta de Xosé Lois González Vázquez, “o Carrabouxo”, publicada no xornal *La Región*



<https://x.com/xlcarrabouxo/status/1801167606977593716>

Estímulo 6.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, “o Bichero”, publicada no xornal *Faro de Vigo*



<https://www.facebook.com/photo/?fbid=2756598587751670&set=a.405259616218924>

Tarefa 6.1. Tempo estimado para a resolución: 20 minutos. Ao comezo de curso, logo dunha reunión de coordinación, o profesorado estima que a suma das horas semanais de estudo das materias química, física e matemáticas debера ser de seis horas, tendo en conta o cambio á nova PAU tal e como se recolle no estímulo 6.1. Despois dos primeiros exames, xa que houbo resultados mellores e peores, a profesora de física dille ao seu alumnado que deben triplicar os esforzos. Na reunión de coordinación son conscientes de que subiron a carga semanal a 10 horas. Posteriormente os resultados de física e de química foron moi frouxos, polo que ambas docentes insisten na necesidade de facer esforzos nestas dúas materias, e falando coa profesora de física deciden que a carga non pode ser máis do dobre da inicial tamén para a dita materia, quedando en 14 horas semanais de estudo en conxunto, despois de dobrar o tempo semanal para química e multiplicar por $2m$ o de matemáticas, onde m depende do número de boletíns que lles entregarán onde hai un número importante de exercicios moi repetitivos.

1. Para que valores de m podemos calcular o número de horas semanais de estudo para cada unha das tres materias?
2. Canto é o tempo conxunto semanal para química e matemáticas?

Solución. (1) Denotemos por Q , F e M o número de horas semanais de estudo de química, física e matemáticas, respectivamente. Segundo o enunciado podemos formular o sistema de ecuacións lineares

$$\begin{cases} Q + F + M = 6, \\ Q + 3F + M = 10, \\ 2Q + 2F + 2mM = 14. \end{cases} \quad (6.1)$$

Sexan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} Q \\ F \\ M \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Se resolvemos o sistema $AX = B$ resulta

$$Q = 4 + \frac{1}{1-m}, \quad F = 2, \quad M = \frac{1}{m-1} \quad (6.3)$$

sempre que $m \neq 1$. Ademais, se $m = 1$ entón o sistema é incompatíbel. Por outra banda,

o número de horas de estudo ten que ser unha cantidade non negativa, polo que

$$\begin{cases} Q = 4 + \frac{1}{1-m} \geq 0 \Leftrightarrow m < 1 \text{ ou } m \geq 5/4, \\ M = \frac{1}{m-1} \geq 0 \Leftrightarrow m > 1. \end{cases} \quad (6.4)$$

En consecuencia, $m > 5/4$ para que o resultado teña sentido.

(2) Finalmente,

$$Q + M = 4 + \frac{1}{1-m} + \frac{1}{m-1} = 4 \text{ horas semanais.} \quad (6.5)$$

□

Tarefa 6.2. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. Podemos estimar a porcentaxe de asistencia á escola e tempo de estudo desde a escola infantil ($t = 0$) ata segundo de bacharelato ($t = 18$) mediante unha función loxística (supoñendo que non fai caso ao estímulo 6.2)

$$E(t) = \frac{400}{6 + 400.000 \exp(-t)}, \quad (6.6)$$

onde t é o tempo medido en anos.

1. Nese intervalo de tempo, cando tes que estudar máis?
2. Que porcentaxe mínima e máxima de tempo queda libre no día para ocio?
3. Segundo a estimación (6.6), hai algún punto de inflexión no tempo de estudo e asistencia á escola? Representa graficamente o tempo de estudo desde os 0 ata os 18 anos, e tamén para $t \in \mathbf{R}$.
4. A práctica de calquera deporte nas distintas ligas ou ir ao conservatorio (de música ou de danza) requiren dun sobreesforzo. Se estimamos que unha destas actividades require un 10 % do tempo diario no ámbito de segundo de bacharelato, canto tempo terías para durmir?

Solución. (1) En primeiro lugar observamos que o denominador de $E(t)$ sempre é positivo, xa que é a suma dunha exponencial (que xa é sempre positiva) e o número seis. Isto significa que o dominio é toda a rectal real $\mathbf{R}$, se ben polo sinalado no enunciado restrinximos a análise ao intervalo $[0, 18]$.

Se calculamos a derivada da función $E(t)$ definida en (6.6) temos

$$E'(t) = \frac{160000000e^{-t}}{(400000e^{-t} + 6)^2}. \quad (6.7)$$

Posto que $E'(t)$ é sempre positiva, temos que a función $E(t)$ é monótona crecente. Ademais, terá o seu mínimo absoluto no punto $t = 0$ e o seu máximo absoluto no punto $t = 18$:

$$E(18) = \frac{400}{6 + \frac{400000}{e^{18}}} \approx 66,599. \quad (6.8)$$

Polo tanto, o máximo tempo de estudo prodúcese xusto aos 18 anos de idade.

(2) Se empregamos os resultados anteriores, a maior porcentaxe de ocio é nos primeiros anos, mentres que o menor tempo de ocio é aos 18 anos, con aproximadamente só 1/3 do tempo libre.

De analizarmos para $t \geq 0$ calcularíamos o supremo da función mediante

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = \frac{200}{3} \approx 66,66 \% \text{ de tempo de estudo}, \quad (6.9)$$

é dicir, pouco máis que o valor no instante $t = 18$. Xa que logo, as porcentaxes máxima e mínima de tempo de lecer son 1 (no primeiro ano) e 33,33% aos 18 anos, respectivamente.

(3) Se determinamos os puntos de corte cos eixos, temos por unha banda

$$E(0) = \frac{200}{200003} \approx 0,001, \quad (6.10)$$

e ademais, se $E(t) = 0$ resultaría

$$\frac{400}{6 + 400.000 \exp(-t)} = 0, \quad (6.11)$$

que non ten solución real. Por outra banda, temos que

$$E(-t) = \frac{400}{6 + 400.000 \exp(t)} \quad (6.12)$$

polo que a función $E(t)$ non é par nin impar. É dicir, non presenta simetrías nin con respecto ao eixo OY nin con respecto á orixe. A función $E(t)$ tampouco presenta periodicidades, é dicir, non existe ningún $T \in \mathbf{R}$ tal que $E(t) = E(t + T)$.

Para determinar a concavidade e a convexidade da función $E(t)$ definida en (6.6) calculamos a derivada segunda

$$E''(t) = -\frac{40000000e^t(3e^t - 200000)}{(3e^t + 200000)^3}. \quad (6.13)$$

Determinamos os puntos de inflexión determinando os valores de t para os cales $E''(t) = 0$, é dicir, posto que $e^t \neq 0$, cando

$$3e^t - 200000 = 0 \Leftrightarrow e^t = \frac{200000}{3}, \quad (6.14)$$

de onde resulta

$$t = \ln\left(\frac{200000}{3}\right) \approx 11,11. \quad (6.15)$$

Antes de $t = 11,11$ temos que $E''(t) > 0$ polo que a función é convexa como t^2 e despois de $t = 10$ temos que $E''(t) < 0$ polo que $E(t)$ é cóncava como $-t^2$. Con outras palabras, temos un punto de inflexión en sexto de primaria.

Posto que o denominador de $E(t)$ nunca é cero, a función $E(t)$ non ten asíntotas verticais. Ademais, da ecuación (6.9) temos que $y = 200/3$ é unha asíntota horizontal. De xeito semellante, aínda que o tempo debe ser positivo,

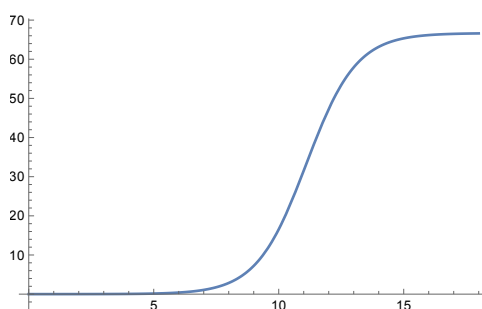
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} E(t) = 0, \quad (6.16)$$

temos que $y = 0$ tamén é unha asíntota horizontal. Ademais,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{E(t)}{t} = 0, \quad (6.17)$$

de xeito que non presenta asíntotas oblicuas.

Cos cálculos previos, podemos representar a gráfica da función $E(t)$ do seguinte xeito:



(4) Posto que a probabilidade de estar na escola ou estudando é $200/3$ % (aproximadamente o 66,66 %), e xa que unha actividade extra supón outro 10 % diario de esforzo, temos ocupado o 76,66 % do tempo, quedando un 23,33 % para descansar: 5,6 horas diarias, que é claramente insuficiente. $\square$

Tarefa 6.3. Tempo estimado para a resolución: 20 minutos. Mariña compatibiliza os estudos no instituto cos do conservatorio de música, que acaban de abrir. O conservatorio ao que vai Mariña ten planta triangular, e portas nos tres vértices situados nos puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, 3)$, para acceder ben á cafetería e secretaría do centro, ben ás aulas de linguaxe musical ou ben ás aulas de instrumentos. A casa de Mariña está localizada no punto de coordenadas $P(19, 6, 9)$, e todas as unidades están en decámetros. A pesar das múltiples protestas, non houbo acordo sobre quen ten que realizar as obras de urbanización e o terreo aínda está «a monte» polo que Mariña pode ir por un descampado desde a súa casa ata o conservatorio.

1. Mariña tivo exame no instituto e rematou tarde o xantar. Quere chegar o antes posíbel ao conservatorio. A que porta debe dirixirse?
2. Que distancia percorrerá?
3. Outro día Mariña decidiu ir desde a súa casa ata a porta C do conservatorio. Os traballos de deseño da cidade seguiron criterios do [plan hipodámico](#) de [Ildefons Cerdà i Sunyer](#), cunha estrutura en cuadrícula, aberta e igualitaria. Nese deseño a liña L11 de autobús vai en liña recta desde a parada do conservatorio no punto $D(2, 0, 0)$ ata a parada no pavillón de deportes $E(17, 15, 0)$. Cal é a distancia mínima que separa a Mariña da liña L11 de autobús?

Solución. (1–2) Calculamos en primeiro lugar as distancias ás portas A , B e C desde a casa de Mariña localizada no punto P :

$$\begin{cases} d(P, A) = d((19, 6, 9), (1, 0, 0)) = \sqrt{18^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{441} = 21 \text{ Dm}, \\ d(P, B) = d((19, 6, 9), (0, 2, 0)) = \sqrt{19^2 + 4^2 + 9^2} = \sqrt{458} \approx 21,4009 \text{ Dm}, \\ d(P, C) = d((19, 6, 9), (0, 0, 3)) = \sqrt{19^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{433} \approx 20,8087 \text{ Dm}. \end{cases} \quad (6.18)$$

En consecuencia, a distancia menor é se vai ata a porta para as aulas de instrumentos. Nese caso, a distancia será de 20,8087 Dm ou equivalentemente de 208,087 metros.

(3) A recta que une a casa de Mariña coa porta $C(0, 0, 3)$ do conservatorio de música pasa polo punto C e ten por vector director

$$\overrightarrow{PC} = (19, 6, 6) = \vec{v}_r, \quad (6.19)$$

é dicir, ten ecuación

$$r : \begin{cases} x = 19t, \\ y = 6t, \\ z = 3 + 6t. \end{cases} \quad (6.20)$$

Por outra banda, a liña L11 que une a parada no punto $D(2, 0, 0)$ coa parada no punto $E(17, 15, 0)$ ten vector director

$$\overrightarrow{DE} = (15, 15, 0) = 15(1, 1, 0), \quad (6.21)$$

de xeito que a ecuación da recta que segue o autobús vén dada por

$$s : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = t, \\ z = 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

Posto que

$$\overrightarrow{CD} = (2, 0, -3), \quad (6.23)$$

temos que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 19 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -51. \quad (6.24)$$

Ademais,

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 19 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-6, 6, 13), \quad (6.25)$$

que ten por módulo

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = |(-6, 6, 13)| = \sqrt{241}. \quad (6.26)$$

Polo tanto, a distancia mínima entre as rectas r e s , ou equivalentemente, a distancia mínima que separa o camiño de Mariña da liña L11 vén dada por

$$d(r, s) = \frac{51}{\sqrt{241}} \approx 3,2852 \text{ Dm.} \quad (6.27)$$

□

Tarefa 6.4. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. O profesorado dunha determinada materia segue un modelo de exame puramente memorístico e o alumnado ten que escribir un tema completo que se sortea escollendo unha bóla dunha urna. Logo dunha división da materia, chegan a que hai 40 posíbeis bólas para sorteo.

1. Unha estudante quere saber cantos deses 40 temas ten que estudar para ter unha probabilidade do 75 % de poder responder con éxito.
2. O alumnado decide facer un experimento e repite 20 veces o procedemento inicial de extraer unha bóla dun bombo. Cada vez que extraen unha bóla e anotan o resultado, colocan novamente a bóla no interior do bombo antes de repetir o experimento. Cal é a probabilidade de que saia 15 veces algún dos temas estudados?, e polo menos 5 veces?
3. Logo do resultado anterior, deciden facer o mesmo experimento 100 veces: cada vez que extraen unha bóla dun bombo e anotan o resultado, colocan novamente a bóla no interior do bombo antes de repetir o experimento. Cal sería agora a probabilidade de que saia 75 veces un tema estudado?
4. Despois dunha asemblea, o alumnado suxire que no lugar de extraer unha soa bóla, o profesorado debe sacar dúas bólas e o alumnado responderá a un dos dous temas. O profesor da materia non domina a estatística e solicita axuda á profesora de matemáticas, formulando o problema deste xeito: Se unha estudante domina 30 temas, e deixa o resto sen estudar, cal é a probabilidade de que con este novo sistema saia un dos temas que domina? E se unicamente preparase a metade dos temas?
5. Cando o profesor comunica ao seu alumnado que non acepta a proposta de sacar dúas bólas, o alumnado decide convocar unha folga. Despois de intensas negociacións finalmente o alumnado consegue algo incluso mellor: no lugar de dúas bólas sacarán tres bólas das que terán que escoller só unha delas. Cal é agora a probabilidade de que saia un dos temas que domina se *só* estudou 15 dos 40 temas?

Solución. (1) O primeiro apartado é trivial pois o que se pregunta é que valor ten que ter T para que

$$\frac{T}{40} = 0,75 \quad (6.28)$$

que resulta ser $T = 30$ temas ten que dominar (dos 40) para ter unha probabilidade do 75 % de poder responder con éxito.

(2) Consideremos a variábel

$$N = \text{número de temas que coinciden cos estudados.} \quad (6.29)$$

Temos entón unha distribución binomial con $n = 20$ e $p = 0,75$. Calculamos

$$P(N = 15) = \binom{20}{15} 0,75^{15} (1 - 0,75)^5 = \frac{20!}{15! 5!} 0,75^{15} 0,25^5 \approx 0,20233. \quad (6.30)$$

Ademais

$$\begin{aligned} P(N \geq 5) &= 1 - (P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4)) \\ &\approx 0,9999996. \end{aligned} \quad (6.31)$$

(3) Neste caso a variábel N segue unha distribución binomial con $n = 100$ e a mesma $p = 0,75$. Posto que

$$n \geq 30, \quad np = 75 > 5, \quad nq = n(1 - p) = 25 > 5, \quad (6.32)$$

podemos aproximar a binomial por unha distribución normal $\tilde{N}$ con

$$\mu = np = 75, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{18,75} \approx 4,330127. \quad (6.33)$$

Entón,

$$P(N = 75) = \binom{100}{75} 0,75^{75} (1 - 0,75)^{25} = 0,091799 \quad (6.34)$$

que tamén podemos calcular empregando a aproximación da binomial pola normal

$$\begin{aligned} P(N = 75) &\approx P\left(\frac{74,5 - 75}{4,330127} \leq \frac{\tilde{N} - 75}{4,330127} < \frac{75,5 - 75}{4,330127}\right) \\ &= P(-0,1154701 \leq Z < 0,1154701) = 1 - 2P(Z > 0,1154701) = 0,09192. \end{aligned} \quad (6.35)$$

(4) No cuarto apartado, a estudante domina 30 temas e non estudou 10 temas. Calculamos entón a probabilidade solicitada do suceso $A = \text{«domina polo menos un dos dous temas»}$ mediante o complementario, que é $A^c = \text{«non estudou ningún dos dous temas»}$; ten que suceder que na primeira extracción non estudase ese tema, que ten unha

probabilidade de $\frac{10}{40}$ e que na segunda extracción, na que só hai 49 bólas das que descoñece 9 tampouco coñeza ese tema:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{10}{40} \frac{9}{39} = 1 - \frac{3}{52} = \frac{49}{52} \approx 0,942. \quad (6.36)$$

Se unicamente preparase 20 temas entón

$$P(A) = 1 - \frac{20}{40} \frac{19}{39} = 0,756, \quad (6.37)$$

é dicir unha probabilidade incluso maior que estudando 30 temas cando só facían unha extracción.

(5) Finalmente, agora calculamos

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{25}{40} \frac{24}{39} \frac{23}{38} = 1 - \frac{115}{494} = \frac{379}{494} \approx 0,767. \quad (6.38)$$

□

Tarefa extra 6.1. Constrúe un texto sobre o analizado nesta situación de aprendizaxe estruturado en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta. O tema pode ser a necesidade do descanso, a importancia de que o profesorado se coordine, ou a presión que existe en segundo de bacharelato no alumnado (e tamén no profesorado).

Tarefa extra 6.2. Elabora un comentario crítico sobre a importancia (ou non) dos boletíns de Matemáticas entregados polo/a profesor/a, valorando a utilidade dos exercicios moi repetitivos.

Tarefa extra 6.3. Ao comezo de curso, logo dunha reunión de coordinación, o profesorado estima que a suma das horas diarias de estudo das materias Historia de España, Lingua Castelá e Literatura, Física e Matemáticas debера ser de catro horas. Despois dos primeiros exames, xa que houbo resultados mellores e peores, a profesora de Lingua Castelá e Literatura explícalle ao seu alumnado que deben dobrar os esforzos. Na reunión de coordinación son conscientes de que subiron a carga diaria a 5 horas. Posteriormente os resultados de Física e Matemáticas foron moi frouxos, polo que ambas docentes insisten na necesidade de dobrar esforzos nestas dúas materias, se ben son conscientes de que xa están en 6 horas diarias de estudo. Despois de varias protestas do alumnado, a profesora de Lingua Castelá e Literatura acepta reducir ao tempo inicial diario, quedando novamente 5 horas diarias de estudo en conxunto.

1. É posíbel determinar o tempo inicialmente pensado de estudo para cada unha das catro materias?
2. Se engadimos que os tempos para Física e Matemáticas son iguais, que poderías deducir?
3. Se unha persoa necesita oito horas diarias de sono, e supoñendo que ten unha media de 28 horas semanais de permanencia no centro, canto tempo de lecer tería se só estudase esas catro materias?

Solución. Formulamos o sistema de ecuacións

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4, \\ x + 2y + z + t = 5, \\ x + 2y + 2z + 2t = 6, \\ x + y + 2z + 2t = 5. \end{cases} \quad (6.39)$$

Sexan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Se resolvemos o sistema resulta

$$x = 2, \quad y = 1, \quad z = 1 - t, \quad (6.41)$$

é dicir, o sistema é compatíbel indeterminado e non hai solución única.

Se agora empregamos a condición $z = t$, da última ecuación resulta que

$$z = 1 - z \quad (6.42)$$

polo que

$$z = t = \frac{1}{2}, \quad (6.43)$$

e entón o sistema si que sería compatíbel determinado. Das 168 horas da semana, restando as de sono, quedan 112 horas. Se restamos as horas de asistencia a clase, quedarían 84 horas. Se estudan 6 horas diarias, os sete días da semana, temos 42 horas de estudo. Deste xeito quedarían outras 42 horas de estudo para lecer, se só houbese esas catro materias. $\square$

Tarefa extra 6.4. O profesor dunha determinada materia está canso de ler solucións disparatadas e decide facer un exame tipo test que elabora con intelixencia artificial para traballar aínda menos. Deseña unha proba de 5 cuestións, e cada unha delas ten dúas posíbeis respostas (a ou b), das que só unha delas é correcta. Por cada pregunta acertada a ou o alumno suma dous puntos, ata o máximo de 10 puntos. Un compañeiro non preparou nada da materia e decide contestar todas as preguntas ao chou, a ver que pasa.

1. Determina o conxunto de posíbeis cualificacións que pode obter este compañeiro e a probabilidade de cada unha delas.
2. Que cualificación cabe esperar?

Nun seguinte exame o profesor decide que hai que penalizar as preguntas que están mal contestadas para contabilizar o azar. Neste novo exame, tamén tipo test de 5 preguntas con dúas opcións das que só unha é correcta, por cada pregunta mal respondida ou en branco a penalización é dun punto, ao tempo que nun acto de bondade infinita o profesor sinala que non pode haber cualificacións negativas.

3. Determina o conxunto de posíbeis cualificacións que pode obter o compañeiro e a probabilidade de cada unha delas.
4. Que cualificación cabe esperar?

Solución. (1) Definamos a variábel aleatoria

$$X = \text{Nota da proba tipo test}, \quad (6.44)$$

Posto que X toma un número finito de valores é unha variábel aleatoria discreta. Consideramos outra variábel aleatoria definida por

$$N = \text{Número de preguntas acertadas no test} \sim B(n = 5; p = 1/2) \quad (6.45)$$

dado que as respostas son independentes e todas teñen a mesma probabilidade de ser respondidas. Nestas condicións a función masa de probabilidade vén dada por:

	X	Probabilidade
Non acerta ningunha	0	$P(X = 0) = P(N = 0) = \binom{5}{0} 0,5^0 (1 - 0,5)^5 = 0,03125$
Acerta só unha	2	$P(X = 2) = P(N = 1) = \binom{5}{1} 0,5^1 (1 - 0,5)^4 = 0,15625$
Acerta só dúas	4	$P(X = 4) = P(N = 2) = \binom{5}{2} 0,5^2 (1 - 0,5)^3 = 0,31250$
Acerta só tres	6	$P(X = 6) = P(N = 3) = \binom{5}{3} 0,5^3 (1 - 0,5)^2 = 0,31250$
Acerta só catro	8	$P(X = 8) = P(N = 4) = \binom{5}{4} 0,5^4 (1 - 0,5)^1 = 0,15625$
Acerta as cinco	10	$P(X = 10) = P(N = 5) = \binom{5}{5} 0,5^5 (1 - 0,5)^0 = 0,03125$

(2) A cualificación esperada, é dicir a esperanza da variábel aleatoria, é de cinco puntos xa que é unha variábel simétrica con respecto ao seu eixo de simetría. Podemos comprobalo:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{i=1}^6 x_i P(X = x_i) \\
 &= 0 \cdot 0,03125 + 2 \cdot 0,15625 + 4 \cdot 0,31250 + 6 \cdot 0,31250 + 8 \cdot 0,15625 + 10 \cdot 0,03125 = 5.
 \end{aligned} \quad (6.46)$$

(3) Definamos, coma no apartado anterior, as variábeis aleatorias

$$X = \text{Nota da proba tipo test}, \quad (6.47)$$

$$N = \text{Número de preguntas acertadas no test} \sim B(n = 5; p = 0.5). \quad (6.48)$$

Supoñamos que a cualificación non pode ser inferior a 0 puntos, é dicir, se a nota numérica é menor que 0, asígnaselle o valor 0. A función masa de probabilidade da variábel X é a seguinte:

X	Nota numérica	Probabilidade
0	-5: 0Ben5Mal/branco	$P(X = 0) = P(N = 0) = \binom{5}{0} 0,5^0 (1 - 0,5)^5 = 0,03125$
	-2: 1Ben4Mal/branco	$P(X = 0) = P(N = 1) = \binom{5}{1} 0,5^1 (1 - 0,5)^4 = 0,15625$
1	+1: 2Ben3Mal/branco	$P(X = 1) = P(N = 2) = \binom{5}{2} 0,5^2 (1 - 0,5)^3 = 0,31250$
4	+4: 3Ben2Mal/branco	$P(X = 4) = P(N = 3) = \binom{5}{3} 0,5^3 (1 - 0,5)^2 = 0,31250$
7	+7: 4Ben1Mal/branco	$P(X = 7) = P(N = 4) = \binom{5}{4} 0,5^4 (1 - 0,5)^1 = 0,15625$
10	10: 5Ben0Mal/branco	$P(X = 10) = P(N = 5) = \binom{5}{5} 0,5^5 (1 - 0,5)^0 = 0,03125$

(4) Neste caso valor esperado é:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{i=1}^5 x_i P(X = x_i) \\
 &= 0 \cdot (0,03125 + 0,15625) + 1 \cdot 0,31250 + 4 \cdot 0,31250 + 7 \cdot 0,15625 + 10 \cdot 0,03125 \\
 &= 2,96875. \quad (6.49)
 \end{aligned}$$

□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois, ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado, o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (*Influencers*) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.

An illustration in the background shows a man with a worried expression looking at a globe that is cracked and glowing red, suggesting it is on fire. In the background, there is a large fire and a bright red sun or fireball in a cloudy sky.

Cambio climático

Situación de aprendizaxe 7. A recente traxedia derivada da DANA (depresión (a)illada en niveis altos) que tivo lugar en València ten moitas lecturas e puntos de vista para a súa análise. Unha delas é o cambio climático, como comeza a afectarnos e como nos afectará nun futuro non tan distante.

Cando falamos de cambio climático referímonos aos cambios a longo prazo non só das temperaturas senón tamén dos patróns meteorolóxicos, tal e como acabamos de observar pola dana. Certamente os cambios poden ser debidos a causas naturais, como poden ser os cambios e variacións na actividade solar ou as erupcións volcánicas como a que aconteceu en La Palma no ano 2021. Desde a «revolución industrial» a humanidade tamén está a influír no cambio climático, fundamentalmente pola queima de combustíbeis fósiles. Este xeito de xerar enerxía (cfr. segunda situación de aprendizaxe) produce gases de efecto invernadoiro, é dicir, capturan a calor solar e incrementan as temperaturas. Como reto final debe evidenciarse un produto final: construción dun texto que se sirva da resolución das distintas tarefas e empregue os estímulos presentados para levar a cabo unha reflexión sobre o cambio climático.

Imaxe de fondo obtida de <https://www.freepik.com>

Estímulo 7.1: O cambio climático.

O clima da Terra cambiou ao longo da historia. Só nos últimos 800.000 anos, houbo oito ciclos de glaciacións e períodos máis cálidos, e o final da última glaciación, hai uns 11.700 anos, marcou o comezo da era climática moderna e da civilización humana. Ademais o clima cambia tanto espacialmente como temporalmente. Sabemos que non é igual o clima en latitudes tropicais que en latitudes polares, nin tampouco gozan do mesmo clima as zonas costeiras que as zonas de alta montaña ou de interior. Ademais, en latitudes medias que é onde nos atopamos nós o clima tamén cambia no tempo, temos diferentes estacións ao longo do ano e podemos atoparnos con cambios no clima que poden ter unha variabilidade anual, decenal ou mesmo maior. Todos estes cambios teñen unha explicación que se atopa en causas naturais, como poden ser a variabilidade na órbita terrestre, a actividade volcánica ou a variabilidade solar entre outras. Con todo, desde o comezo da revolución industrial coa utilización primeiramente do carbón e posteriormente do petróleo para o desenvolvemento da actividade humana en todos os seus aspectos, industrial e social, os cambios observados no clima non se poden explicar unicamente tendo en conta causas naturais. Os estudos revelan que a subida vertixinosa, en termos climáticos, experimentada pola temperatura atmosférica globalmente ten unha estreita correlación co aumento da concentración de partículas de dióxido de carbono, CO_2 , na atmosfera. A dita relación foi feita xa pola climatóloga e inventora [Eunice Newton Foote](#) no 1856 cando levou a cabo un experimento fundamental que estableceu a conexión entre o dióxido de carbono (CO_2) e o quecemento atmosférico, precedendo por tres anos ao traballo de [John Tyndall](#). A pesar de que se coñecía dende hai tempo o efecto do aumento da concentración de CO_2 na atmosfera, non foi ata o cuarto informe do IPCC (organismo principal que estuda o Cambio Climático Intergovernmental Panel on Climate Change) publicado en 2007. Nese informe sinálase que cunha probabilidade superior ao 90 % o cambio climático observado desde a Revolución Industrial non se pode explicar sen a consideración da influencia das actividades humanas en especial no seu papel no cambio na composición da atmosfera a través do incremento dos gases efecto invernadoiro pola utilización de combustibles fósiles. Chegar a esta conclusión de maneira inequívoca, en 2021, a través do sexto informe do IPCC, non foi tarefa fácil. Os estudos de cambio climático precisan de moitos datos, e durante un longo período de tempo, xa que non se poden facer afirmacións nin atribucións ao cambio climático polo que ocorre durante un verán ou dous, ou porque se produza unha nevada extraordinaria, senón que é necesario estudar e analizar series de datos que polo menos abarquen períodos de 30 anos.

A lonxitude das series de datos permite poder distinguir a variabilidade temporal natural que poida ter unha determinada variable daquela que só atopa unha explicación se consideramos a interacción antropoxénica. Para todos estes estudos necesitamos moitas ferramentas matemáticas e tecnolóxicas. Así para o estudo de clima e do cambio climático deben usarse desde conceptos máis teóricos como as funcións matemáticas ata algúns máis aplicados como os métodos computacionais, pasando pola estatística ou novas tecnoloxías como a computación cuántica.

Foi tamén en 2021 cando [Hasselmann](#) (Hamburgo, 1931) e [Manabe](#) (Ehime, Xapón, 1931) compartiron a metade do premio Nobel de Física «polo modelado físico do clima da Terra, cuantificando a variabilidade e predicindo con fiabilidade o quecemento global». A outra metade do premio foi para o físico [Giorgi Parisi](#) «polos seus estudos sobre as flutuacións dos sistemas físicos en todas as escalas, desde os átomos aos sistemas planetarios». Hasselmann contribuíu ao desenvolvemento de métodos que estableceron que a actual tendencia ao quecemento global é atribuíble, principalmente, á actividade humana. Hasselmann favoreceu de forma decisiva o coñecemento do cambio climático. El foi pioneiro no desenvolvemento de modelos numéricos para o estudo do clima pero os seus estudos tamén axudaron a demostrar que o cambio climático que vivimos desde o comezo da Revolución Industrial pode ser atribuído á acción humana. O método desenvolvido por Hasselmann coñecido como «*fingerprinting*» («pegadas climáticas»), permite distinguir entre a variabilidade natural do clima e a debida ás actividades humanas. Os efectos do quecemento actual que avanza a un ritmo que non se viu en moitos milenios e que é debido en gran medida ao aumento das emisións de dióxido de carbono á atmosfera e a outras actividades humanas reflíctense na atmosfera, o océano e a terra, producíndose cambios rápidos e xeneralizados na atmosfera, o océano, a criosfera e a biosfera.

Aínda que cando falamos de cambio climático nun primeiro momento unicamente pensamos na temperatura media da superficie do planeta que superou neste ano 2024 os 1,5 °C desde finais do século XIX, tamén se constatou que o océano se está quentando. O océano absorbeu gran parte deste aumento de calor, e os 100 metros superiores do océano mostran un quecemento de máis de 0,33 graos Celsius desde 1969. Debemos lembrar que a Terra almacena o 90 % da enerxía adicional no océano. As capas de xeo de Groenlandia e a Antártida diminuíron en masa, tal como amosan os datos do [Gravity Recovery and Climate Experiment](#) da NASA, Groenlandia perdeu unha media de 279.000 millóns de toneladas de xeo por ano entre 1993 e 2019, mentres que a Antártida perdeu ao redor de 148.000 millóns de toneladas de xeo por ano. Os glaciares están a desaparecer en case todas as partes do mundo, mesmo nos Alpes, o Himalaia, os Andes, as Montañas Rochosas, Alaska e África. O nivel global do mar subiu uns 20 centímetros no último século acelerándose lixeiramente cada ano.

A cantidade de eventos extremos, tanto de precipitación como pode ser a última DANA en València, como de temperatura non só ocorren con máis frecuencia, senón con máis intensidade e afectando cada vez a áreas maiores. Ademais, desde o comezo da Revolución Industrial, a acidez das augas superficiais do océano aumentou aproximadamente un 30 %. Este aumento débese á absorción por parte dos océanos de entre un 20 % e un 30 % das emisións de dióxido de carbono debidas á actividade humana, entre 7.200 e 10.800 millóns de toneladas métricas ao ano.

Todos estas observacións non teñen explicación sen ter en conta o incremento do efecto invernadoiro natural do noso planeta polo uso indiscriminado dos combustibles fósiles. As proxeccións nos diferentes escenarios climáticos propostos polo IPCC non son moi optimistas se non comezamos a diminuír as emisións de dióxido de carbón, unha atmosfera e un océano máis quente é tamén máis enerxética e esa enerxía dará lugar a eventos atmosféricos, como seca, olas de calor, precipitacións torrenciais, tornados,... cada vez máis frecuentes e intensos, afectando a áreas que ata o de agora non sufriran ditos fenómenos. Nas nosas mans está evitalo.

Texto de **Nieves Lorenzo González**, Catedrática de Física da Terra na Universidade de Vigo e directora da Escola de Enxeñaría Aeronáutica e do Espazo.

Estímulo 7.2: Viñeta de [Xosé Lois González Vázquez](#), “o Carrabouxo”, publicada no xornal [La Región](#)



<https://carrabouxo.es/2019/06/19/carra18-6-19/>

Estímulo 7.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, “o Bichero”



<https://sostenibleosustentable.com/es/cambio-climatico/que-tipo-de-persona-eres-tu-frente-al-cambio-climatico/>

Estímulo 7.4: Viñeta de Pablo Prado “Fuco” no xornal *Novas do Eixo Atlántico*



https://www.instagram.com/p/CYmLw7HMSac/?img_index=4

Tarefa 7.1. Tempo estimado para a resolución: 25 minutos. Se ben España viña sufrindo episodios de choiva torrencial na zona de Levante dende hai anos, nos últimos tempos, debido á subida de temperaturas do Mar Mediterráneo, estes episodios veñen derivando en DANAS (depresión (a)illada a niveis altos) devastadoras.

Un edificio próximo a un cavorco urbano viuse afectado pola última dana. Os bens afectados nese inmobile foron: dous baixos comerciais, tres coches, dúas motos e dúas pinturas de gran valor que estaban na galería de arte situada nun dos baixos comerciais rexentado por un «negacionista climático» reflectido no estímulo 7.2.

O importe da indemnización é distinto segundo o ben do que se trate. A indemnización polos coches segue unha distribución normal de media 2.500 € e desviación típica 1.200 €.

1. O [Consorcio de Compensación de Seguros](#) é unha sociedade participada polo Estado e polas compañías aseguradoras. Este consorcio, a través dun fondo, indemniza os afectados por catástrofes naturais, sempre e cando os bens estivesen asegurados previamente. O fondo nítrese dunha porcentaxe da prima que se paga en todos os seguros. Este tipo de protección é única na Unión Europea, e quizais por iso, mentres no resto da UE a porcentaxe de bens asegurados é dun 40 %, en España alcanza o 70 % segundo [UNESPA \(Unión Española de Entidades Aseguradoras y de Reaseguros\)](#). Tendo en conta a porcentaxe de bens asegurados en España, cal é a probabilidade de que os propietarios cobren indemnización do Consorcio de Compensación de Seguros polo menos por 7 dos 9 bens afectados?
2. E de que os propietarios non cobren ningunha indemnización?
3. Cal é a probabilidade de que a indemnización media dos tres coches afectados nese edificio sexa superior a 2.450 €?

Solución. Consideremos a variábel aleatoria

$$X = \text{número de bens indemnizados dos 9 bens afectados.} \quad (7.1)$$

Polo referido no enunciado podemos afirmar que X segue unha distribución binomial con $n = 9$ e $p = 0,70$.

(1) Temos que calcular

$$\begin{aligned} P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) \\ = \binom{9}{7} 0,70^7 \cdot 0,30^2 + \binom{9}{8} 0,70^8 \cdot 0,30^1 + \binom{9}{9} 0,70^9 \cdot 0,30^0 \\ = 0,266828 + 0,15565 + 0,0403536 = 0,4628. \end{aligned} \quad (7.2)$$

(2) A probabilidade de que os propietarios non cobren ningunha indemnización vén dada por

$$P(X = 0) = \binom{9}{0} 0,70^0 \cdot 0,30^9 = 0,000019683. \quad (7.3)$$

(3) Consideremos agora a variábel

$$Y = \text{indemnización por cada coche}. \quad (7.4)$$

Segundo o sinalado no enunciado Y segue unha distribución normal $N(2.500; 1.200)$. Consideremos a indemnización media dos tres

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} \quad (7.5)$$

que segue unha distribución normal $N(2.500; 1.200/\sqrt{3}) = N(2.500; 692,82)$. Polo tanto, a probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} > 2.450) &= P\left(\frac{\bar{Y} - 2.500}{692,82} > \frac{2.450 - 2.500}{692,82}\right) = P(Z > -0,07) \\ &= 1 - P(Z > 0,07) = 1 - [1 - P(Z < 0,07)] = P(Z < 0,07) = 0,5279. \end{aligned} \quad (7.6)$$

□

Tarefa 7.2. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. Nos últimos anos as e os expertos veñen avisando de que a virulencia dos lumes ten aumentado. Isto débese á falta de xestión da masa forestal, ao cambio climático e á maior iteración entre o mundo urbano e o rural.

1. Un labrego ten unha casa e un alpendre para os animais, con coordenadas $C(5, 0, 1)$ e $A(6, 0, 0)$ en quilómetros respectivamente. O home está traballando nunha das suas leiras que ten a porta no punto $L(-1, 2, 1)$ no mesmo sistema de coordenadas, cando se declara un lume que ten o seu fronte paralelo a CA , a un quilómetro de distancia, e avanza a razón de 0,25 km/h. O labrego diríxese cara á súa casa e ao seu alpendre en bicicleta a unha velocidade de 20 km/h. Chegará a tempo de protexer a casa e liberar os animais antes de que chegue o lume? Podes pensar que, no país do minifundio, non hai que ter en conta a distancia desde o punto que se encontre traballando na leira ata a súa entrada.
2. Unha faísca prende no punto de coordenadas $F(34/11, 91/11, 23/11)$ contido no plano xerado polos puntos A , C e L . Un dos helicópteros co seu canastro cheo de auga sitúase perpendicularmente ao plano anterior no punto de coordenadas $H(2, 5, 1)$. Se deixa caer a auga que contén no canas, caerá a auga no novo foco do lume, tendo en conta que o vento que hai nese momento é irrelevante?
3. Nese instante, a que distancia se atopa voando o helicóptero sobre o plano?

Solución. (1) Temos que calcular a distancia desde a porta da leira L ata a recta que pasa polos puntos A e C . Posto que

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{CL} = (-6, 2, 0) \end{cases} \implies \overrightarrow{CL} \times \overrightarrow{CA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -6, -2). \quad (7.7)$$

Podemos entón calcular a distancia

$$d = \frac{|\overrightarrow{CL} \times \overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{CA}|} = \sqrt{22} = 4,69 \text{ km}. \quad (7.8)$$

Empregamos agora a celeberrima fórmula que relaciona velocidade, espazo e tempo para determinar canto tardará en chegar:

$$t = \frac{e}{v} = \frac{4,69}{20} = 0,23 \text{ horas}. \quad (7.9)$$

Temos agora que sumar a distancia ata os puntos A e C para saber se chegará a tempo das dúas cousas, pero esa distancia é menor que dúas veces a distancia de A a C , que é $2\sqrt{2}$ que significaría 0,14 horas. Sumado ao tempo anterior dá 0,37 horas. Por outra banda, dos datos no enunciado o lume tarda

$$\frac{1}{0,25} = 4 \text{ horas} \quad (7.10)$$

de xeito que semella que terá tempo a liberar os animais antes de que chegue o lume.

(2) Desde o punto de vista matemático un xeito de resolver é calcular a proxección ortogonal da ubicación do helicóptero sobre o plano π determinado polos puntos A , C e L que ten por ecuación

$$\pi : \begin{vmatrix} x-6 & y & z \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies -2x - 6y - 2z + 12 = 0, \quad (7.11)$$

de onde temos

$$\pi : x + 3y + z - 6 = 0. \quad (7.12)$$

Calculamos agora a recta que pasa polo punto $H(2, 5, 1)$ e é perpendicular ao plano π

$$r : \begin{cases} x = 2 + \alpha, \\ y = 5 + 3\alpha, \\ z = 1 + \alpha. \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad (7.13)$$

Para rematar, a proxección de H sobre o plano π é o punto de corte da recta r e o plano π :

$$2 + \alpha + 3(5 + 3\alpha) + 1 + \alpha - 6 = 0 \implies \alpha = \frac{12}{11}, \quad (7.14)$$

de onde obtemos

$$H' = \left(2 + \frac{12}{11}, 5 + \frac{36}{11}, 1 + \frac{12}{11}\right) = \left(\frac{34}{11}, \frac{91}{11}, \frac{23}{11}\right), \quad (7.15)$$

polo que a auga impactará no novo foco do lume.

(3) Basta con calcular o módulo do vector $\overrightarrow{H'H}$. Posto que

$$H(2, 5, 1), \quad H'\left(\frac{34}{11}, \frac{91}{11}, \frac{23}{11}\right) \quad (7.16)$$

temos que

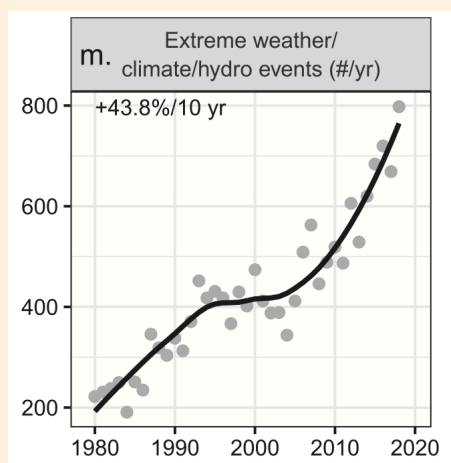
$$\overrightarrow{H'H} = \left(\frac{12}{11}, \frac{36}{11}, \frac{12}{11}\right) \quad (7.17)$$

de xeito que

$$\left| \overrightarrow{H'H} \right| = \sqrt{\left(\frac{12}{11}\right)^2 + \left(\frac{36}{11}\right)^2 + \left(\frac{12}{11}\right)^2} \approx 3,61 \text{ km.} \quad (7.18)$$

□

Tarefa 7.3. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. Os efectos do cambio climático son cada vez máis palpábeis, provocando trastornos significativos nos ecosistemas, na economía e facendo inhabitables cada vez máis zonas da Terra, tal e como se representa nos estímulos 7.2 e 7.4. Cada 10 anos os desastres naturais teñen aumentado máis dun 45 %. Os puntos de inflexión no comportamento da función que reflicte o número de desastres climáticos son de vital importancia na aceleración dos efectos do cambio climático. Nun artigo do ano 2020 titulado [World Scientists' Warning of a Climate Emergency](#), preséntanse distintas gráficas relacionadas co cambio climático, en particular:



Se o número de desastres naturais en función dos anos transcorridos desde 1980 vén dado pola función

$$f(x) = 0,02x^3 - 0,75x^2 + 19x + a, \quad x \geq 0, \quad (7.19)$$

1. Calcula o valor de a sabendo que no ano 2000 houbo 440 desastres naturais.
2. Calcula en que ano tivo lugar o último punto de inflexión significativo no comportamento da función.
3. Cantos desastres naturais se produciron nese momento?

4. Tendo en conta a función (7.19), cal é o incremento porcentual no número de desastres na última década que aparece na gráfica superior?
5. Outro grupo de traballo estadounidense discrepa e mantén que o número de desastres naturais segue a función

$$g(x) = 218 e^{0,03x}, \quad x \geq 0, \quad (7.20)$$

pero está de acordo en que nos últimos anos se produciu un punto de inflexión. A que grupo de traballo apoiarías ti?

6. Se pasaron x anos desde 1980, serías quen de definir a función que nos dá o índice de incremento porcentual do número de desastres naturais de calquera ano respecto a 1980? Canto sería o incremento no ano 1990 respecto a 1980?

Solución. (1) Para analizar o ano 2000 temos que dar o valor $x = 20$ xa que comeza no ano 1980. Entón

$$f(20) = 0,02 \cdot 20^3 - 0,75 \cdot 20^2 + 19 \cdot 20 + a = 400, \quad (7.21)$$

de onde resulta que

$$a = 200. \quad (7.22)$$

(2) Posto que o dominio é $[0, +\infty)$ determinamos os posíbeis puntos de inflexión igualando a derivada segunda a cero. Para iso calculamos primeiro

$$f'(x) = 0,02 \cdot 3 \cdot x^2 - 0,75 \cdot 2 \cdot x + 19. \quad (7.23)$$

Polo tanto

$$f''(x) = 0,02 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x - 0,75 \cdot 2, \quad (7.24)$$

polo que ao igualar $f''(x) = 0$ resulta

$$x = \frac{1,5}{0,12} = 12,5. \quad (7.25)$$

Para $x < 12,5$ temos que $f''(x) < 0$ polo que a función é cóncava como $-x^2$ e para $x > 12,5$ entón $f''(x) > 0$ polo que a función é convexa como x^2 . En consecuencia, a función presenta un punto de inflexión no punto 12,5 que corresponde a 1992,5. Con outras palabras, o último punto de inflexión produciuse a mediados de 1992.

(3) Temos que

$$f(12,5) = 0,02 \cdot 12,5^3 - 0,75 \cdot 12,5^2 + 19 \cdot 12,5 + 200 = 359,375. \quad (7.26)$$

Polo tanto, producíronse 359 desastres naturais en 1992.

(4) Posto que o ano 2020 corresponde a $x = 40$ e o ano 2010 corresponde a $x = 30$, calculamos

$$f(40) = 1040, \quad f(30) = 635, \quad (7.27)$$

de onde temos que o incremento porcentual é

$$\frac{1040}{635} \cdot 100 = 163,78. \quad (7.28)$$

O número de desastres medrou nun 63,78 %.

(5) Posto que o dominio da función $g(x)$ tamén é $[0, +\infty)$ calculamos outra vez a derivada segunda para determinar os posíbeis puntos de inflexión:

$$g'(x) = 218 \cdot 0,03 \cdot e^{0,03x} \implies g''(x) = 218 \cdot 0,03 \cdot 0,03 \cdot e^{0,03x}. \quad (7.29)$$

Xa que a función exponencial non ten raíces reais temos que $g''(x) \neq 0$, e polo tanto, a función $g(x)$ non presenta puntos de inflexión.

Se temos en conta a gráfica do enunciado temos que $f(x)$ é máis próxima á realidade para avaliar o número de desastres naturais.

(6) Consideramos en xeral

$$F(x) = \frac{f(x)}{f(0)} \cdot 100, \quad (7.30)$$

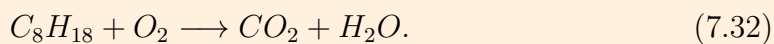
de xeito que

$$F(10) = \frac{f(10)}{f(0)} \cdot 100 = \frac{335}{200} \cdot 100 = 167,5. \quad (7.31)$$

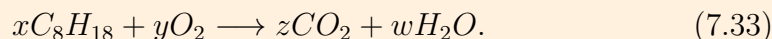
En consecuencia, o incremento foi do 67,5 %.

□

Tarefa 7.4. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. O dióxido de carbono, CO_2 , é necesario para procesos vitais como a fotosíntese, entre outros. Pero a abundancia de dióxido de carbono pode danar os ecosistemas oceánicos debido á acidificación dos océanos e á contaminación. A acidificación oceánica é a diminución gradual do pH (potencial de hidróxeno) do océano debido á absorción de dióxido de carbono en grandes cantidades na auga procedente da atmosfera. O dióxido de carbono ao mesturarse coa auga crea ácido carbónico que é o que provoca que o pH se volva máis acedo. A gran cantidade de dióxido de carbono na atmosfera non só supón un problema para os ecosistemas oceánicos, senón que tamén é un factor do quecemento global que afecta ao medio ambiente a maior escala. O dióxido de carbono e outros compostos contaminan a atmosfera en grandes cantidades causadas por reaccións simples. Algunhas reaccións requiren máis reactivos para obter un único composto do produto; con todo, outras reaccións requiren poucos reactivos para obter múltiplos do produto final, por exemplo, a creación de auga. Comprender como crear e equilibrar correctamente as ecuacións químicas é imprescindible para que as e os científicos saiban que cantidade de produto se forma a partir de certos reactivos. Saber canto produto se forma a partir de certa cantidade de reactivos axuda ás científicas/os para determinar como certas reaccións están a contaminar o medio ambiente. Tamén permite verificar cantos reactantes deben estar presentes para formar o produto. Toda ecuación química equilibrada debe cumprir a Lei de Conservación da Materia. Esta lei establece que «non hai ningún cambio detectábel na cantidade total de materia presente cando a materia se converte dun tipo a outro ou cambia entre os estados sólido, líquido ou gaseoso», polo que debe haber o mesmo número de moléculas da mesma especie en ambos lados da ecuación. Isto conséguese sumando números enteiros de coeficientes a determinadas moléculas ou compostos. O octano, que se agrega á gasolina para mellorar o rendemento do motor, relaciónase cunha serie de consecuencias ambientais negativas desde o aumento das emisións de gases de efecto invernadoiro ata a contaminación do aire. A ecuación química para a combustión de octano C_8H_{18} co osíxeno dispoñible O_2 que produce enerxía, dióxido de carbono e auga é



1. Para equilibrar a ecuación química debemos atopar números enteiros positivos x, y, z, w tales que



Escribe un sistema de ecuacións que relacione os coeficientes desta ecuación química, de tal maneira que haxa o mesmo número de tipos de átomos en ambos lados.

2. Discute e resolve o sistema de ecuacións obtido. Escribe a ecuación química equilibrada cos menores valores que determines.
3. Con cantos conxuntos diferentes de coeficientes pode equilibrarse esta reacción? É posíbel ter unha ecuación química deste tipo que poida equilibrarse exactamente de dúas maneiras?
4. Sabendo que un litro de gasolina ten unha masa de 750 gr de octano. Calcula a cantidade de CO_2 producida por 10 litros de gasolina. (As masas moleculares do C , H e O son 12, 1 e 16 u, respectivamente).

Solución. (1) Igualando o número de átomos de carbono, hidróxeno e osíxeno en cada lado, obtense o sistema de ecuacións lineares homoxéneo con tres ecuacións e catro incógnitas:

$$\begin{cases} 8x - z = 0, \\ 18x - 2w = 0, \\ 2y - 2z - w = 0, \end{cases} \quad (7.34)$$

que podemos escribir en forma matricial mediante

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

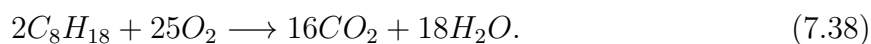
(2) Posto que o rango da matriz

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.36)$$

é 3, o sistema é compatíbel indeterminado. Facendo $w = t$, $t \in \mathbf{R}$, obtemos

$$x = \frac{1}{9}t, \quad z = \frac{8}{9}t, \quad 2y = \frac{16}{9}t + t = \frac{25}{9}t. \quad (7.37)$$

Pero como x , y , z e w deben ser enteiros positivos, eliximos $t = 18$, que é o menor valor que elimina todos os denominadores, e a reacción equilibrada é



(3) Un número infinito de conxuntos de coeficientes. Non é posíbel ter unha ecuación que poida equilibrarse exactamente de dúas formas. Todo sistema de ecuacións lineares con solución ten 0, 1 ou infinitas solucións. Os sistemas de ecuacións lineares que dan os coeficientes da ecuación química sempre teñen infinitas solucións.

(4) Partimos de que 1 mol de C_8H_{18} ten masa molar 114 gr e 1 mol de CO_2 ten 44 gr. Así, 10 l de gasolina, é dicir, 7,5 kg de C_8H_{18} , producirá

$$\frac{8 \cdot 44 \cdot 7,5}{0,114} \approx 23.157,89, \quad (7.39)$$

ou se preferimos 23,1578 Kg de CO_2 . □

Tarefa extra 7.1. Constrúe un texto sobre o «negacionismo climático» en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 7.2. Tal e como se sinalou na Tarefa 7.1, o [Consorcio de Compensación de Seguros](#) é unha sociedade participada polo Estado e polas compañías aseguradoras. Este consorcio, a través dun fondo, indemniza os afectados por catástrofes naturais, sempre e cando os bens estivesen asegurados previamente. O fondo nítrese dunha porcentaxe da prima que se paga en todos os seguros. Este tipo de protección é única na Unión Europea, e quizais por iso, mentres no resto da UE a porcentaxe de bens asegurados é dun 40 %, en España alcanza o 70 % segundo [UNESPA \(Unión Española de Entidades Aseguradoras y de Reaseguros\)](#).

1. Se tomamos 1000 bens de distintos países da Unión Europea e resultan estar asegurados 420 deles, o intervalo de confianza para a porcentaxe de bens asegurados a partir dos datos da mostra estaría en consonancia coa introdución anterior cun nivel de confianza do 98 %?
2. Se queremos reducir a amplitude do intervalo de confianza, que teríamos que facer?
3. Se mantemos a mesma mostra e obtemos que a porcentaxe de bens asegurados está entre 69 % e 76 %, con que nivel de confianza se obtivo o intervalo?

Solución. (1) Temos que a proporción na mostra é

$$\hat{p} = \frac{420}{1000} = 0,42. \quad (7.40)$$

Para que a área sexa 0,98, na distribución normal $N(0;1)$ temos que $z_{\alpha/2}=2,33$.

Se empregamos a fórmula do intervalo de confianza para a proporción,

$$\begin{aligned} \text{IC} &= \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) \\ &= \left(0,42 - 2,33 \sqrt{\frac{0,42 \cdot 0,58}{1000}}, 0,42 + 2,33 \sqrt{\frac{0,42 \cdot 0,58}{1000}} \right) = (0,38, 0,46), \end{aligned} \quad (7.41)$$

cun nivel de confianza do 98 %, que está en consonancia con que na Unión Europea a proporción de bens asegurados está en torno ao 40 %.

(2) Posto que o raio do intervalo é

$$z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \quad (7.42)$$

e xa que mantemos a mostra $\hat{p}$, o radio tamén permanece igual. Por tanto, a solución é aumentar o tamaño da mostra n ou ben diminuír o nivel de confianza $1 - \alpha$, xa que deste xeito diminúe $z_{\alpha/2}$.

(3) Neste caso temos que o intervalo de confianza vén dado de xeito explícito

$$IC = (0,69, 0,76), \quad (7.43)$$

de xeito que podemos calcular o seu raio mediante

$$r = \frac{0,76 - 0,69}{2} = 0,035. \quad (7.44)$$

Con estes valores podemos agora determinar o $z_{\alpha/2}$ correspondente desde

$$0,035 = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{0,42 \cdot 0,58}{1000}}, \quad (7.45)$$

que implica que

$$0,035 = z_{\alpha/2} 0,016 \implies z_{\alpha/2} = 2,19. \quad (7.46)$$

Empregamos agora as táboas da distribución normal $N(0;1)$ para ter que

$$1 - 0,9857 = \alpha/2 \implies \alpha/2 = 0,0143. \quad (7.47)$$

Posto que

$$0,9857 - 0,0143 = 0,9714 \quad (7.48)$$

temos que o intervalo foi calculado cun nivel de confianza do 97,14 %.

□

Tarefa extra 7.3. A chamada ecuación de difusión modeliza a expansión dun contaminante a partir dunha única emisión concentrada. Noutras palabras, vértese o contaminante no medio ambiente unha soa vez, e logo déixase que se difunda desde o punto de vertedura, sen engadir máis. Este modelo só é adecuado para a dispersión da contaminación en distancias moi curtas. En distancias máis longas hai que ter en conta as correntes de ar, e ar e auga. Se medimos a concentración, c , do contaminante no punto $x = a$, entón un bo modelo é

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right), \quad (7.49)$$

onde t é o tempo transcorrido.

1. Calcula a taxa de variación instantánea da función $c(t)$ cando $a = 5$.
2. Que acontece cando o tempo está cada vez máis próximo a cero? Depende de a o resultado? Explica por que isto ten sentido científico.
3. Acha o instante en que c atinxe o seu valor máximo.
4. Para $a = 4$, ezboza a gráfica que explica a evolución do contaminante nos 40 primeiros segundos.

Solución. (1) Calculamos a derivada da función $c(t)$

$$c'(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right) \left(\frac{a^2}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}} - \frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}\right) = \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right) \frac{a^2 - 2t}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}, \quad (7.50)$$

e procedemos a substituír a polo valor sinalado:

$$c'(t) = \exp\left(\frac{-25}{4t}\right) \frac{25 - 2t}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}. \quad (7.51)$$

(2) Podemos expresar a idea de tender o tempo a cero mediante o seguinte límite lateral (pois non ten ningún sentido que o tempo sexa negativo):

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} c(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right). \quad (7.52)$$

Expresado dese xeito, o primeiro factor tende a $+\infty$ mentres que o segundo factor tende á exponencial de menos infinito, é dicir, tende a cero. Polo tanto, temos unha indeterminación

da forma $\infty \cdot 0$. Se expresamos o límite destoutro xeito

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} c(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right)}{\sqrt{4\pi t}}, \quad (7.53)$$

temos que tanto numerador como denominador tenden a 0. Se aplicamos a regra de L'Hôpital resulta

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^2 \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right)}{4t^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^2 \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right)}{4\sqrt{\pi} t^{3/2}}, \quad (7.54)$$

que resulta novamente $0/0$. No lugar de seguir aplicando a regra de L'Hôpital deste xeito pois o único que conseguimos é complicar cada vez máis o límite, optamos por expresalo doutro xeito:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right)}{\sqrt{4\pi t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/\sqrt{4\pi t}}{\exp\left(\frac{a^2}{4t}\right)} \quad (7.55)$$

que agora tende a infinito dividido por infinito. De aplicarmos agora a regra de 'Hôpital resulta

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right) \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} a^2} = 0. \quad (7.56)$$

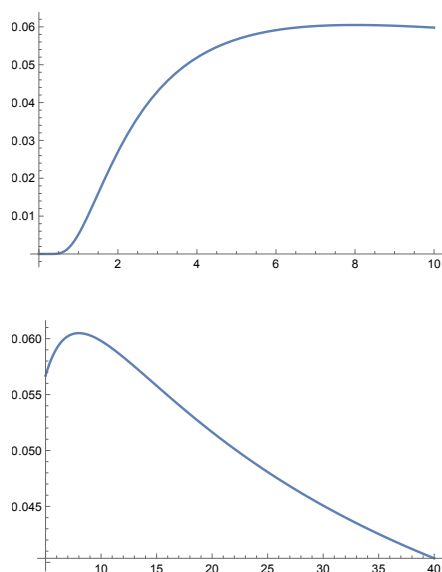
É dicir, o límite tende a cero para calquera valor de a . Isto significa que no momento inicial non hai contaminación, que é coherente co que se tenta modelar.

(3) Do obtido no apartado primeiro podemos determinar os posíbeis extremos relativos da función igualando a derivada primeira a cero:

$$c'(t) = \sqrt{4\pi t} \exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right) \frac{a^2 - 2t}{8\sqrt{\pi} t^{5/2}} = 0, \quad (7.57)$$

de onde resulta que o único candidato está en $t = a^2/2$. Analizando o signo da derivada primeira antes e despois dese instante de tempo obtemos que nese punto a función atinxe un máximo relativo. Após liberar o contaminante, temos que se difunde ata chegar ao instante de maior concentración. Ao non haber máis contaminante que no instante inicial, a medida que o tempo avanza despois de atinxir o máximo comeza a diminuír.

(4) Representamos a función para $a = 4$ en dous intervalos de tempo. Primeiro desde o tempo inicial ata $t = 10$ e no segundo gráfico desde $t = 5$ ata $t = 40$.



□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois, ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado, o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (*Influencers*) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.

Pesca

Situación de aprendizaxe 8. A pesca é un dos principais sectores económicos galegos. Acabas de ver na TVG que desde o ano 2021 ata o ano 2023 temos as seguintes cantidades de capturas en quilogramos e o importe en euros, segundo as notas emitidas polas lonxas ou centros autorizados para a primeira venda de produtos pesqueiros frescos en Galiza, regulada polo [Real decreto 418/2015](#), do 29 de maio, polo que se regula a primeira venda de produtos pesqueiros.

Ano	Cantidad (Kg)	Importe (€)
2021	132.782.505,93	424.955.237,35
2022	134.287.109,15	437.398.236,72
2023	125.793.278,89	412.383.761,45

Dun xeito global, a pesca contribúe co 4,8 % do produto interior bruto (PIB) de Galiza, e é o cuarto sector no relativo ao volume de exportacións.

Unha das artes de pesca tradicionais é a denominada «o xeito», empregada para sardiña e xouba. Nos últimos anos «o xeito» foi cuestionado e mesmo prohibido desde a Unión Europea, aínda que finalmente no ano 2015 retiraron a prohibición do seu uso. No ano 2023 capturáronse 261.661 kg de peixe con esta arte, empregada por case 150 embarcacións. Nesta situación de aprendizaxe preténdese que o alumnado reflexione sobre a importancia do sector pesqueiro, a través de tarefas que tratan distintas artes de pesca, e reflexione sobre a necesidade de facer unha pesca sustentábel.

Imaxe de fondo de Ángel M. Rey. Fotografía da ría de Arousa

Estímulo 8.1: Pesca sostible

A pesca e a acuicultura están entre as actividades económicas máis antigas do mundo, con evidencias destas prácticas xa no Paleolítico Superior, hai uns 40.000 anos. Trátase de actividades extractivas e de recolección que xeran outro tipo de industrias ao seu redor como o procesamento, almacenamento, distribución e venda de peixe e mariscos. Mais tamén cultura, tradición, gastronomía e mesmo unha forma de vida como defenden as comunidades indíxenas que non contemplan estas actividades dende unha perspectiva económica. Certamente, pénsase que a cestería e as primeiras formas de tecido de punto desenvolvéronse para crear artes de pesca. Isto confirma que a relación dun pobo co mar vai moito mais alá de cuestións de seguridade alimentaria.

Con 1629 quilómetros de costa Galicia ten un vencello especial co mar. A pesca artesanal e a acuicultura, que implican a utilización de métodos tradicionais como as nasas e as liñas de man, ademais da cría de mariscos e peixes de forma controlada, están estendidas no territorio onde moitas familias viven desta actividade. Ademais, desenvólvense no que se coñece como mar territorial, que se considera parte do territorio galego e alcanza ata as doce millas náuticas dende a liña de costa. Máis aló e ata duascenas millas náuticas esténdese a zona económica exclusiva, onde os estados costeiros teñen dereito de explotación e uso dos recursos mariños, incluída a produción de enerxía a partir da auga e do vento.

Entre o mar territorial e a zona económica exclusiva desenvólvese a pesca de baixura, que adoita volver ao porto de partida no mesmo día. Ao contrario que a pesca de altura e de grande altura, que se practica en mar aberto e na que Galicia ten unha das frotas máis importantes do mundo que faena non só fronte á súa propia costa, senón tamén fronte a doutros países como Arxentina, Canadá, Chile, Mauricio, Mauritania, Namibia, Nova Zelandia, Senegal, Sáhara Occidental, Seychelles, ou mesmo Suráfrica. Esta expansión da frota galega foi posible grazas á súa industrialización, que é unha das características actuais do sector, empurrada por un potente tecido investigador galego en todos os aspectos relacionados co mar como o impacto do cambio climático nos océanos e mares, o funcionamento dos ecosistemas mariños, a análise das ferramentas político-xurídicas para o desenvolvemento da economía azul e a protección do medio ambiente, ou a ordenación do espazo marítimo para compatibilizar os distintos usos do mar, entre outras moitas liñas de investigación.

Ao mesmo tempo que produce moitos beneficios, a intensa industrialización do sector fai perigar a protección dos ecosistemas mariños e o mantemento das poboacións de peixes para futuras xeracións. O establecemento de cotas de captura, vedas de pesca, prohibicións de captura de especies en perigo, e mesmo a utilización de artes de pesca selectivas, que non maten as especies que non se van usar e respecten en xeral os hábitats mariños, son medidas pensadas para asegurar unha pesca sostible. Por iso, son tamén medidas que aseguran un boa gobernanza dos recursos mariños e que todas as persoas interesadas na pesca deberían cumprir, dende axentes gobernamentais e mariñeiros ata turistas. En Galicia, o furtivismo é un problema que non só afecta a quen vive da pesca e da acuicultura, senón tamén a supervivencia dos recursos mariños e, por tanto, a todas e a todos.

[How inappropriate to call this planet Earth when it is quite clearly Ocean](#). A cita de [William C. Clarke](#) subliña que o noso planeta é tres cuartos de auga e, por tanto, ocupa moita máis extensión ca terra. Ademais, a meirande parte dos océanos e mares non están sometidos á soberanía de país ningún. Como se pode entón evitar a sobreexplotación dos recursos mariños onde non chega o aparato do estado para controlar que, por exemplo, non se pesquen especies prohibidas ou en época de veda?

No ámbito internacional, os países organizan as súas relacións con base nunha serie de principios entre os que se atopa o principio do pavillón: cada estado goberna nos barcos que portan a súa bandeira. Mais isto non axuda moito a loitar contra a sobreexplotación dos recursos mariños se cada país autoriza a pesca do que considera necesario. Cómpre cooperación institucional entre eles, o que se logra a través de organizacións internacionais onde están representados os intereses galegos polo Estado español ou a Unión Europea, no caso de que a frota galega pesque unha especie protexida, por exemplo, pola Comisión internacional para a Conservación do Atún Atlántico, ou nun ámbito xeográfico como o cuberto pola [Organización Rexional de Pesca do Pacífico Sul](#).

Outros foros internacionais como o da Organización das Nacións Unidas para a Alimentación e a Agricultura ([FAO](#)) perseguen un tratamento integral para acabar coa pesca ilegal, non declarada e non regulamentada (pesca [INDNR](#)) que é posibilitada pola corrupción das administracións e polas deficiencias dos réximes de ordenación, especialmente dos países en desenvolvemento, xa que carecen da capacidade e dos recursos necesarios para aplicar iniciativas eficaces de seguimento, control e vixilancia (SCV) do que fan os barcos nas súas augas.

Segundo datos da [FAO](#), case sesenta millóns de persoas no mundo traballan na pesca e na acuicultura, especialmente en Asia e África. A pesca [INDNR](#), a sobre-explotación dos recursos mariños, o cambio climático, son todos factores que están alterando as súas formas de subsistencia, aumentando a pobreza e empurrando a moitos á emigración e a outros a empregar traballo forzado e de nenas e nenos para facer rendible o seu negocio ou, simplemente, sobrevivir. En por si, a pesca está entre os oficios mais perigosos do mundo polo medio en que se desenvolve e as condicións nas que se fai o traballo que é illado e intensivo. Aínda que as condicións de traballo e vida a bordo dos buques galegos melloraron sensiblemente, o número excesivo de horas de traballo segue sendo un problema que dificulta a renovación xeracional no mar en Galicia e noutros países avanzados. O sistema de remuneración «á parte», que é común a todos os mares e océanos, fomenta este traballo intenso, xa que a venda da captura se reparte entre os armadores e os mariñeiros. Se non hai capturas ou se tarda moito en capturar, as condicións laborais a bordo dos buques pesqueiros afúndense. Agora mesmo, a pesca [INDNR](#) e o traballo forzado forman un círculo vicioso que cómpre romper axiña.

A situación agrávase pola complexidade das cadeas globais da pesca e da acuicultura que son difíciles de controlar por parte dos estados. Produtos da pesca desembarcados ou recollidos nun continente son transportados a outro para o seu procesamento e logo retornados para a súa distribución no primeiro continente o que diminúe os beneficios e o emprego locais. Ademais, os produtos derivados da pesca [INDNR](#) e, en moitas ocasións, obtidos con traballo forzado (como é o caso da gamba tailandesa) ou de nenas e nenos (como o peixe gato do Lago Volta) poden facilmente acceder a mercados comerciais estranxeiros. Isto afoga o abastecemento local de alimentos e converte as violacións de dereitos humanos en beneficios económicos que, ademais, son competencia desleal para os armadores que respectan os dereitos laborais. Hai que renovar, por tanto, as iniciativas para conseguir unha pesca sostible, tanto por parte dos gobernos que poden prohibir a importación de produtos da pesca obtidos con pesca [INDNR](#) e traballo forzado, como por parte de todas e todos nós, asegurándonos de que o que consumimos foi capturado con pesca responsable e en condicións de traballo decentes. Como só temos un planeta no que todas as persoas estamos conectadas, estas accións non só axudan aos que máis sofren, senón á propia supervivencia das tradicións galegas.

Texto de **Laura Carballo Piñeiro**, catedrática de Dereito Internacional Privado. Decana da [Facultade de Relacións Internacionais](#) da [Universidade de Vigo](#).

Estímulo 8.2: Viñeta de Xosé Lois González Vázquez, “o Carrabouxo”, publicada no xornal *La Región*



<https://carrabouxo.es/2017/12/14/carra13-12-17/>

Estímulo 8.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, “o Bichero”, publicada no xornal *Faro de Vigo*



<https://www.facebook.com/404374256307460/photos/a.405259616218924/713179915426891>

Tarefa 8.1. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. No porto de Burela, após observar e analizar os resultados das entradas de [peixe sapo](#) (*Luphius budegassa*) durante bastante tempo, consideran que a taxa de capturas diarias cada mes pode ser modelada por

$$C(t) = 3.100 \exp\left(\frac{-t}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right), \quad (8.1)$$

expresada en quilogramos, onde o termo multiplicativo exponencial modela a distribución das capturas debido ao esgotamento progresivo, a función trigonométrica representa o ciclo natural de rexeneración e variabilidade diaria, e a variábel t sinala o tempo medido en días. Para esta análise tiveron en conta os resultados de moitos barcos, entre eles queremos destacar tres polo significativo dos seus nomes: o [Xurelo](#), o [Polycomander](#), mais o [Prestige](#).

1. A área limitada pola gráfica de $C(t)$, co eixe OT e as rectas $t = 0$ e $t = 30$, é unha aproximación da cantidade total de peixes capturados durante o primeiro período de 30 días desde que comeza o tempo. Cal é esa cantidade?
2. Acha, se existe, o máximo da función $C(t)$ no intervalo $(0, 30)$, e interprétao para determinar o día de maiores capturas nos 30 primeiros días e a cantidade capturada. Emprega dalgún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#) para verificar o resultado.

Solución. Antes de resolver esta tarefa convén sinalar que entre os 14 activistas a bordo do verdadeiro [Xurelo](#) (do porto de Ribeira), no ano 1981, estaba o daquela xornalista [Manuel Rivas](#), que vén de recibir o [Premio Nacional de las Letras 2024](#). Coa súa acción foron quen de parar a vertedura de residuos radioactivos na fosa atlántica.

(1) Xa desde o punto de vista matemático, podemos calcular a cantidade total de peixe sapo capturado integrando a taxa de captura $C(t)$ no intervalo desde $t = 0$ ata $t = 30$:

$$\begin{aligned} \text{PS} &= \int_0^{30} C(t) dt = \int_0^{30} 3.100 \exp\left(\frac{-t}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right) dt \\ &= 3.100 \int_0^{30} \exp\left(\frac{-t}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right) dt \quad (8.2) \end{aligned}$$

Temos que calcular unha primitiva do integrando (e logo aplicar a regra de Barrow). Se temos en conta a regra ALPES ([LIATE](#) en inglés; nesa páxina podes ver que non é perfecta) para a integración por partes, derivamos a exponencial e integramos a función

trigonométrica

$$\begin{cases} u = \exp\left(\frac{-t}{4}\right), & \frac{du}{dt} = -\frac{1}{4} \exp\left(\frac{-t}{4}\right), & du = -\frac{1}{4} \exp\left(\frac{-t}{4}\right) dt, \\ dv = \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right) dt, & \frac{dv}{dt} = \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right), & v = -\frac{30}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right), \end{cases} \quad (8.3)$$

de xeito que

$$\begin{aligned} \text{PS} &= 3.100 \left\{ \exp\left(\frac{-t}{4}\right) \left(-\frac{30 \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)}{\pi} \right) \Big|_{t=0}^{t=30} - \int_0^{30} -\frac{30 \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)}{\pi} \left(-\frac{1}{4} \exp\left(\frac{-t}{4}\right) dt \right) \right\} \\ &= 3.100 \left\{ \frac{30}{e^{15/2} \pi} - \left(-\frac{30}{\pi} \right) - \int_0^{30} \frac{30 \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)}{\pi} \left(\frac{1}{4} \exp\left(\frac{-t}{4}\right) dt \right) \right\} \\ &= 3.100 \left\{ \frac{30}{\pi} \left(1 + \frac{1}{e^{15/2}} \right) - \frac{15}{2\pi} \int_0^{30} \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right) \exp\left(\frac{-t}{4}\right) dt \right\}. \quad (8.4) \end{aligned}$$

Na integral que queda pendente aplicamos novamente integración por partes, derivando a función exponencial e integrando a función trigonométrica:

$$\begin{aligned} \text{PS} &= 3.100 \int_0^{30} \exp\left(\frac{-t}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right) dt \\ &= 3.100 \left\{ \frac{30}{\pi} \left(1 + \frac{1}{e^{15/2}} \right) - \frac{15}{2\pi} \left[\exp\left(\frac{-t}{4}\right) \frac{30}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right) \Big|_{t=0}^{30} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{30} \frac{30}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right) \left(-\frac{1}{4} \exp\left(\frac{-t}{4}\right) \right) dt \right] \right\} \\ &= 3.100 \left\{ \frac{30}{\pi} \left(1 + \frac{1}{e^{15/2}} \right) - \frac{15}{2\pi} \left[0 - 0 + \frac{15}{2\pi} \int_0^{30} \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right) \exp\left(\frac{-t}{4}\right) dt \right] \right\} \\ &= 3.100 \left\{ \frac{30}{\pi} \left(1 + \frac{1}{e^{15/2}} \right) - \frac{225}{4\pi^2} \int_0^{30} \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right) \exp\left(\frac{-t}{4}\right) dt \right\}. \quad (8.5) \end{aligned}$$

Temos entón unha integral cíclica. Temos que PS verifica a ecuación

$$\text{PS} = 3.100 \frac{30}{\pi} \left(1 + \frac{1}{e^{15/2}} \right) - \frac{225}{4\pi^2} \text{PS} \quad (8.6)$$

de onde

$$\text{PS} = \frac{372000 \left(1 + e^{15/2} \right) \pi}{e^{15/2} (225 + 4\pi^2)} \approx 4.421 \text{ kg}. \quad (8.7)$$

O resultado é acorde cos datos globais publicados na páxina [Pesca de Galicia](#).

(2) Para determinar os posíbeis extremos relativos no intervalo aberto $(0, 30)$ calculamos a derivada da función $C(t)$

$$\begin{aligned} C'(t) &= \frac{310}{3} \pi \exp\left(\frac{-t}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right) - 775 \exp\left(\frac{-t}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right) \\ &= \frac{155}{3} \exp\left(\frac{-t}{4}\right) \left(2\pi \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right) - 15 \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right) \right). \quad (8.8) \end{aligned}$$

Posto que a función exponencial non ten raíces reais, os posíbeis extremos relativos de $C(t)$ son solución da ecuación

$$2\pi \cos\left(\frac{\pi t}{30}\right) - 15 \sin\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 0, \quad (8.9)$$

ou equivalentemente

$$\tan\left(\frac{\pi t}{30}\right) = \frac{2\pi}{15} \quad (8.10)$$

de onde

$$t = \frac{30}{\pi} \arctan\left(\frac{2\pi}{15}\right) \approx 3,78796. \quad (8.11)$$

Se analizamos o signo da derivada primeira antes e despois do posíbel extremo, podemos deducir que nese punto a función $C(t)$ presenta un máximo relativo. É dicir, arredor do cuarto día de cada ciclo temos un máximo relativo. O valor de peixe sapo capturado nese instante de tempo é

$$C(3,78796) \approx 464,594 \text{ kg}. \quad (8.12)$$

□

Tarefa 8.2. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. Nas lonxas da Mariña captúrase moito e moi bo peixe, e centraremos esta tarefa en tres especies: pescada, sardiña e peixe sapo (tamén coñecido rabada ou peixe tamboril e que en inglés ten moitos nomes: anglerfish, frog fish, monk, devil fish ou sea devil). Cada unha desas tres especies ten diferentes profundidades de pesca, e tentamos modelar a relación entre as capturas e as profundidades cun sistema de ecuacións lineares.

As profundidades de pesca consideradas son pouco profundas, intermedias e profundas, e as cantidades de captura de cada especie dependen destas profundidades:

- A cantidade de pescada (p) capturada depende nun 40 % da pesca en pouca profundidade, un 30 % da pesca intermedia e un 30 % da pesca de fondo.
- A cantidade de sardiña capturada (s) depende nun 70 % da pesca en pouca profundidade, un 20 % da pesca intermedia e un 10 % da pesca de fondo.
- Non temos porcentaxes para a cantidade de peixe sapo capturado (r) nin en pesca intermedia nin en profundidade, pero sabemos que o 10 % da pesca é en pouca profundidade.

Cada mes:

- A captura total a pouca profundidade é de 1.000 toneladas.
- A captura total na profundidade intermedia é de 800 toneladas.
- A captura total na profundidade é de 1.200 toneladas.

1. Determina, se é posíbel, as opcións de captura de peixe sapo segundo a profundidade da captura.
2. En función do resultado do apartado anterior, para que porcentaxes de pesca intermedia resultan maiores e menores cantidades de captura de peixe sapo?

Solución. (1) Posto que non temos dous dos datos para as capturas de peixe sapo en profundidade intermedia nin en profundidade, xa que o 10 % é en pouca profundidade e o 100 % é o total, introducimos un parámetro m , para pesca intermedia, de xeito que a pesca en profundidade é o $(90 - m)$ %.

Denotemos

$$X = \begin{pmatrix} p \\ s \\ r \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

e definamos as matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 800 \\ 1.200 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,70 & 0,10 \\ 0,30 & 0,20 & m/100 \\ 0,30 & 0,10 & (90 - m)/100 \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

Posto que

$$\det(A) = -0,12 + 0,003m \quad (8.15)$$

temos que se $m = 40$ o rango de A é dous (o primeiro menor principal diagonal ten determinante distinto de cero), pero a matriz $(A|B)$ ten rango tres (o menor formado pola primeira, segunda e cuarta columna ten determinante distinto de cero). Polo tanto, para ese valor de m o sistema resulta incompatíbel e non ten solución.

Para calquera outro valor de m o rango de A é máximo e coincide co rango da matriz

ampliada $(A|B)$. Se resolvemos o sistema resulta

$$p = \frac{11m - 340}{-0,12 + 0,003m}, \quad s = \frac{3 - 0,2m}{-0,12 + 0,003m}, \quad (8.16)$$

$$r = \frac{-50}{-0,12 + 0,003m}. \quad (8.17)$$

Temos entón que determinar os valores de m para os cales as tres cantidades son maiores ou iguais que cero. Sabemos que o denominador $-0,12 + 0,003m$ ten a raíz real $m = 40$. Ademais, o numerador de p anúlase en 30,9091. Por outra banda, s anúlase en $m = 15$; finalmente, r non se anula nunca. Polo tanto, temos que analizar os tres signos nos intervalos $I_1 = [0, 15)$, $I_2 = [15, 30,9091]$, $I_3 = (30,9091, 40)$ e $I_4 = (40, +\infty)$.

No intervalo I_4 observamos que r é negativo, polo que non ten ningún sentido real. No intervalo I_3 son p e s os que teñen signos negativos, polo que novamente non ten sentido real. No intervalo I_2 temos que todos os valores son maiores ou iguais que cero. No intervalo I_1 os valores de s son negativos, polo que tamén queda descartado.

Polo tanto, o valor de m ten que estar comprendido entre 15 e 30,9091 para que as solucións teñan sentido. Isto significa que as capturas de peixe sapo dependen de entre un 15 % e un 30,9091 % da pesca a profundidade intermedia e dependen na porcentaxe restante (ata completar un 90 %) da pesca de fondo.

(2) As cantidades capturadas de peixe sapo en función de m veñen dadas por

$$r(m) = \frac{-50}{-0,12 + 0,003m} \quad (8.18)$$

con derivada con respecto a m

$$r'(m) = \frac{0,15}{(-0,12 + 0,003m)^2}. \quad (8.19)$$

Polo tanto, $r'(m) \neq 0$ e ademais observamos que $r'(m) > 0$, o que significa que $r(m)$ é unha función crecente. En consecuencia, teremos o menor valor nas capturas de peixe sapo cando estas dependan nun $m = 15$ % da pesca a profundidade intermedia (e polo tanto, nun 75 % da pesca de fondo) e o maior valor cando estas dependan nun $m = 30,9091$ % da pesca a profundidade intermedia (e polo tanto, nun 59,0909 % da pesca de fondo).

□

Tarefa 8.3. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. Durante segundo de bacharelato cómpre un descanso, tal e como se sinalou no estímulo da situación de aprendizaxe titulada «Tempos de estudo e de lecer». Uns amigos acordamos visitar a cidade de Ourense, e posto que o [Museo Arqueolóxico de Ourense](#) segue pechado, e a programación cultural está reducida á práctica nulidade, decidimos visitar as famosas termas de Ourense, en concreto, visitamos e deleitámonos coas augas termais de [Outariz](#). Despois de tan merecido momento de relax, visitamos o [Pórtico do Paraíso](#) da súa catedral, que conserva a policromía orixinal. O 1 de outubro de 1993 houbo un concerto con reproducións dos 24 instrumentos representados no dito Pórtico, polo que decidimos ver con detalle esa parte da catedral. Despois xantamos nun (dos moitos) excelentes restaurantes que posúe a cidade e os seus arredores. De primeiro prato tomamos ameixas.

Nunha táboa do restaurante amósanse os datos recollidos, en porcentaxe, das capturas por tipo de ameixa (clam) durante o mes de decembro de 2024 nas provincias de Pontevedra e A Coruña (non consideramos as lonxas de Lugo polo seu baixo número de capturas).

	Pontevedra	A Coruña
Ameixa xapónica	51,77	31,44
Ameixa fina	1,70	1,61
Ameixa babosa	4,17	2,90
Ameixa bicuda	0,00	0,00
Ameixa rubia	5,06	1,35

1. Unha vez servidos, non sabemos que tipo de ameixa é, e o camareiro está moi ocupado. Sen termos en conta o prezo, que tipo de ameixa será máis probábel que sexa? De que provincia é máis probábel que veña? Obtén os seus valores.
2. O camareiro só sabe que mercan nunha peixaría que trae todo da lonxa de Carril (Pontevedra). Cal é a probabilidade de que o tipo de ameixa non sexa a xapónica?
3. Os sucesos mercar ameixa nas lonxas de Pontevedra e da Coruña son incompatíbeis? Son independentes?

Solución. (1) O tipo de ameixa máis probábel é a que ten maior porcentaxe. Sumando

por filas obtemos a porcentaxe de ameixa por tipo (sen ter en conta a provincia):

	Pontevedra	A Coruña	Total fila
Ameixa xapónica	51,77	31,44	83,21
Ameixa fina	1,70	1,61	3,31
Ameixa babosa	4,17	2,90	7,07
Ameixa bicuda	0,00	0,00	0,00
Ameixa rubia	5,06	1,35	6,41
Total columna	62,70	37,30	

Polo tanto, diremos que o tipo de ameixa máis probábel é a ameixa xapónica. A suma por columna dános a porcentaxe por provincia. Así, a provincia de procedencia será Pontevedra.

(2) Sexa o suceso

$$A_x = \text{ameixa xapónica} \quad (8.20)$$

e o seu suceso complementario A_x^c . Consideremos

$$Po = \text{mercar nas lonxas de Pontevedra}. \quad (8.21)$$

A probabilidade pedida é:

$$P(A_x^c | Po) = \frac{P(A_x^c \cap Po)}{P(Po)} = \frac{0,0170 + 0,0417 + 0,0506}{0,6270} = \frac{0,1093}{0,6270} = 0,1743. \quad (8.22)$$

(3) Dous sucesos A e B son incompatíbeis se $P(A \cap B) = 0$. Os sucesos «Po=mercar nas lonxas de Pontevedra» e «ACo=mercar nas lonxas da Coruña» teñen intersección baleira polo que

$$P(Po \cap ACo) = 0. \quad (8.23)$$

Os dous sucesos son independentes se:

$$P(Po \cap ACo) = P(Po) \cdot P(ACo). \quad (8.24)$$

Dado que os sucesos Po e ACo teñen probabilidade positiva e son incompatíbeis, non poden ser independentes:

$$P(Po \cap ACo) = 0 \text{ por ser incompatíbeis, e } P(Po) \cdot P(ACo) > 0 \quad (8.25)$$

Entón son sucesos dependentes, o cal é lóxico dado que se se merca nas lonxas dunha provincia non se mercan nas lonxas da outra. $\square$

Tarefa 8.4. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. O xeito é unha arte de enmalle de deriva que está constituído por un pano rectangular estendido entre dúas trallas, a superior, que consta dun sistema de flotación por boias que permite o calamento a profundidade variábel, e a inferior, que está lastrada con chumbos. Debe permanecer unido á embarcación mediante un cabo de lonxitude variábel, quedando o outro extremo libre. Fundamentalmente emprégase para capturar sardiñas e é un modo de pesca sustentábel e respectuoso co medio ambiente. No estímulo 3.3 podes ver unha das moitas protestas que houbo cando se tentou prohibir este tipo de arte. A Consellaría do Mar fixa cada ano un [Plan de xestión da sardiña con arte de xeito](#). Para o ano 2025 determina, entre outros, que:

- (i) A altura máxima do xeito, despois de armada, entre trallas ou relingas, será de 16 metros.
- (ii) A lonxitude máxima total do xeito autorizada por buque e día non poderá exceder, en ningún caso, os 1.000 metros.

A barca xeiteira La Manuela é o símbolo da vila de Rianxo, famosa polas súas xoubas. Esta embarcación combinou a faena xeiteira coas competicións de traíñas, atinxindo numerosos premios.

Un día preto do San Xoán, La Manuela 2 sae á pesca da sardiña. Cando ten o pano totalmente estendido, nun sistema de referencia La Manuela 2 está no punto de coordenadas $(0, 0, 0)$, os dous extremos superiores do pano están nos puntos $A(1, 1, 2)$ e $B(11, 11, 22)$ e un extremo do pano inferior está no punto $C(6/5, 6/5, 9/5)$. Cada unidade, neste sistema de referencia, equivale a $\frac{50\sqrt{6}}{3}$ metros. Traballando en equipo:

1. Se $\overrightarrow{AC}$ é un dos lados do pano, determina as coordenadas do outro extremo do pano.
2. Determina se La Manuela 2 cumpre as condicións de altura máxima e lonxitude máxima do pano.
3. Un banco de sardiñas desprázase na dirección do vector $\vec{v} = (1, 2, 0)$. Para capturar o maior número de exemplares, a mellor posición do pano é a perpendicular á dirección do banco de peixes. A posición do pano de La Manuela 2 é a mellor? Cal é o ángulo que forman o pano e a dirección do banco?

Solución. **(1)** Calculamos en primeiro lugar o ángulo que forman os vectores $\overrightarrow{AB} = (10, 10, 20)$ e $\overrightarrow{AC} = (1/5, 1/5, -1/5)$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = 0, \quad (8.26)$$

de xeito que os vectores son ortogonais.

Para determinar o punto que falta, que denotamos por $D(x_D, y_D, z_D)$, posto que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ son iguais, temos que

$$(10, 10, 20) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \left(x_D - \frac{6}{5}, y_D - \frac{6}{5}, z_D - \frac{9}{5}\right). \quad (8.27)$$

Polo tanto,

$$D\left(\frac{56}{5}, \frac{56}{5}, \frac{109}{5}\right). \quad (8.28)$$

(2) Para determinar a altura do pano, calculamos en primeiro lugar a distancia entre os puntos A e C :

$$d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \left|\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{5} \text{ unidades}. \quad (8.29)$$

Logo, a altura do pano é de

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \frac{50\sqrt{6}}{3} \text{m} = 10\sqrt{2} \text{m} \leq 16 \text{m}, \quad (8.30)$$

polo que se verifica a primeira condición.

Calculamos de seguido a lonxitude do pano, para o que precisamos saber a distancia entre os puntos A e B :

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |(10, 10, 20)| = 10\sqrt{6} \text{ unidades}. \quad (8.31)$$

Do mesmo xeito que para a altura, determinamos a lonxitude do pano mediante

$$10\sqrt{6} \frac{50\sqrt{6}}{3} \text{m} = 1.000 \text{m} \leq 1.000 \text{m}, \quad (8.32)$$

polo que se cumpre tamén a segunda condición.

(3) Segundo se sinala no enunciado, a posición do pano é a mellor cando o vector $\vec{v} = (1, 2, 0)$ é perpendicular ao plano que forma co pano. Este plano está determinado polos puntos A , B e C de xeito que un vector normal ao plano é

$$\vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 20 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = (-6, 6, 0). \quad (8.33)$$

O vector $\vec{v}$ é perpendicular ao plano que forma o pano se é paralelo ao vector $\vec{n}_\pi$. Posto que

$$\text{rang}(\vec{n}_\pi, \vec{v}) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad (8.34)$$

o vector non é perpendicular. É dicir, o pano non está colocado na mellor posición. O ángulo que forman o pano e a dirección do banco de peixes é

$$\angle(\vec{v}, \pi) = \arcsen(\vec{n}_\pi, \vec{v}) = \arcsen \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}_\pi| |\vec{v}|} = \arcsen \frac{1}{\sqrt{10}} = \arcsen \frac{\sqrt{10}}{10} = 0,3218 \text{ rad.} \quad (8.35)$$

□

Tarefa 8.5. Tempo estimado para a resolución: 25'. En dous ríos galegos, o Ulla mais o Miño, captúrase a [lamprea](#), un animal vertebrado prehistórico cuxa orixe se remonta a máis de 500 millóns de anos e que non evolucionou practicamente. A lamprea adulta, de aspecto pisciforme, vive no mar e reproducese no río, onde pasa a maior parte da súa vida como larva. Un campo de investigación moi importante está relacionado coa recuperación de [problemas medulares en seres humanos](#) empregando estudos sobre lampreas, xa que este peixe é quen de ter rexeneración espontánea logo dunha lesión medular. Outro é [o estudo dos circuítos nerviosos que controlan a mirada](#), xa que na lamprea poden realizarse experimentos in vitro que son imposíbeis de levar a cabo noutros modelos de experimentación animal como é o rato, tal e como desenvolven no grupo [NEUROLAM](#) da [Universidade de Vigo](#). Na captura da lamprea teñen grande importancia as [pesqueiras](#), estruturas de pedra, algunhas delas da época romana, que delimitan unha parte do río. As pesqueiras compóñense de varios corpos en forma de paralelepípedos. Cada pesqueira conta cun, dous, tres ou incluso catro poios. Entre cada dous poios atopamos unha especie de canella entre 0,80 e 0,90 m por onde descorre a auga. Na entrada desta canella, colócase o voitirón, aínda que tamén se poden colocar outro tipo de redes.

1. Se nun certo sistema de referencia a base dun destes paralelepípedos está no plano de ecuación

$$\pi : x + 2y + z = 6, \quad (8.36)$$

e un punto da cara oposta ten coordenadas $P(4, 5, 6)$. Traballade en grupos para determinar a altura desta parte da pesqueira. Coa axuda dalgún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#) representa esta parte da pesqueira.

2. Nunha parte do río podemos aproximar dicindo que a superficie do río está nun plano paralelo á base do paralelepípedo do apartado anterior e situado por enriba da súa base a unha distancia de $\frac{\sqrt{6}}{3}$ metros. Podes determinar a ecuación da superficie do río?

Solución. Antes de proceder a resolver esta tarefa consideramos que debe ser mencionado [Alfonso Vázquez Martínez](#), quen publicou o primeiro ensaio sobre [a lamprea no río Miño](#) no ano 1962. Alfonso tamén participou na [emisión galega da BBC](#) levada a cabo durante a ditadura franquista.

- (1) A altura do paralelepípedo coincide coa distancia do punto $(4, 5, 6)$ ao plano π :

$$\text{Altura} = d((4, 5, 6), x + 2y + z = 6) = \frac{|4 + 2 \cdot 5 + 6 - 6|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{7\sqrt{6}}{3} \approx 5,72 \text{ m.} \quad (8.37)$$

- (2) Xa que é un plano paralelo, a súa ecuación é da forma

$$x + 2y + z + d = 0, \quad (8.38)$$

onde temos que determinar o valor de d segundo o sinalado no enunciado. Posto que a distancia entre os dous planos é de $\frac{\sqrt{6}}{3}$ temos que

$$\frac{|d + 6|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \implies |d + 6| = 2 \implies \begin{cases} d = -8, \\ d = -4. \end{cases} \quad (8.39)$$

Temos inicialmente dous posíbeis planos:

$$\pi_1 : x + 2y + z - 8 = 0, \quad \pi_2 : x + 2y + z - 4 = 0. \quad (8.40)$$

Para determinar que plano é o correcto, escollemos un punto en cada un deles fixando $x = y = 0$:

$$Q_1(0, 0, 8), \quad Q_2(0, 0, 4). \quad (8.41)$$

Polo tanto, o plano pedido é π_1 .

□

Tarefa extra 8.1. Constrúe un texto sobre a necesidade de termos unha pesca sustentábel estruturado en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 8.2. Cando se explota unha poboación de peixes, o «rendemento sostíbel» é o número de peixes que poden capturarse anualmente sen que a poboación diminúa co tempo. Ademais, o «rendemento máximo sostíbel», ou RMS, é a taxa de explotación que proporciona o maior rendemento sen levar a poboación á extinción. Se se extrae máis ca o RMS, a poboación extínguese; se se extrae menos ca o RMS, a explotación é menos produtiva. Nesta tarefa estudaremos o RMS para un modelo de poboación simple con captura da especie rodaballo na ría de Arousa. A produción española de rodaballo é a maior de Europa, xa que atinxe o 73 % da produción de todo o continente, e a segunda do mundo por detrás de China. O 99,3 % da produción estatal procede de Galiza, onde a industria alcanzou un gran desenvolvemento, tal e como se recolle no traballo [*An institutional analysis of Galician turbot aquaculture*](#).

1. Comezamos por un modelo de crecemento da poboación sen explotación. Un modelo común de crecemento da poboación é a ecuación loxística, que di que a taxa de crecemento, $\frac{dP}{dt}$, dunha poboación vén dada por

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right), \quad (8.42)$$

onde P é a poboación de peixes no instante t e na que aparecen dúas constantes: $r > 0$ (taxa de crecemento intrínseca da especie) e $K > 0$ (capacidade de carga da zona de pesca).

- (a) Para que valores de P a poboación de peixes permanece constante?
- (b) Determina o tamaño da poboación P para o cal temos maior taxa de crecemento. Cal é o valor máximo da taxa de crecemento?

2. Agora modificamos o modelo de crecemento loxístico para incluír un termo de captura. Supoñamos que a poboación se captura a un ritmo hP , é dicir, que o ritmo de captura é proporcional ao número de habitantes. A ecuación da taxa de crecemento da poboación é a seguinte

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - hP. \quad (8.43)$$

- (a) Demostra que, para obter unha poboación que teña unha taxa de crecemento cero nalgún P positivo, débese ter que $0 < h < r$. Demostra tamén que esta poboación con taxa de crecemento cero (chamada poboación en estado estacionario, P_e) é

$$P_e = K \left(1 - \frac{h}{r}\right). \quad (8.44)$$

- (b) Estabelece agora P como a poboación en estado estacionario (é dicir, $P = P_e$). A taxa de captura é entón hP_e . Calcula a taxa máxima de captura e estuda cando isto ocorre.
- (c) Asumamos os seguintes parámetros para o rodaballo en Galiza: $r = 0,4$ (taxa de crecemento anual específico) e $K = 1.000$ toneladas (capacidade de carga na ría de Arousa). Calcula o rendemento máximo sostíbel (RMS) e interpreta o significado biolóxico da explotación para o tamaño da poboación RMS.
- (d) Discute as implicacións para as políticas pesqueiras en Galiza se a taxa de captura actual é de 1.500 toneladas anuais.

Solución. (1.a) Temos que calcular os valores de P para os que $\frac{dP}{dt} = 0$, é dicir

$$rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) = 0. \quad (8.45)$$

Posto que $r \neq 0$ temos dúas opcións, nomeadamente

$$P = 0, \quad (8.46)$$

ou

$$1 - \frac{P}{K} = 0, \quad (8.47)$$

de onde as dúas solucións son $P = 0$ ou $P = K$, das que a primeira carece de sentido físico pois non podemos non ter peixes.

(1.b) Temos que maximizar a taxa de crecemento $T = \frac{dP}{dt}$. Para determinar os posíbeis extremos de T calculamos a súa derivada empregando a propia ecuación (8.42) para expresar novamente P'

$$T' = \frac{r(K-2P)P'}{K} = \frac{r(K-2P)rP(1-\frac{P}{K})}{K} = \frac{r^2}{K^2}P(K-P)(K-2P), \quad (8.48)$$

de onde, posto que $r \neq 0$, $P \neq 0$ e $P \neq K$ temos que

$$P = \frac{K}{2}. \quad (8.49)$$

Posto que

$$T''\left(\frac{K}{2}\right) = -\frac{Kr^3}{8} < 0, \quad (8.50)$$

temos que a taxa de crecemento ten un máximo nese punto. A taxa de crecemento máxima é entón

$$r\left(\frac{K}{2}\right)\left(\frac{K}{2K}\right) = \frac{rK}{4}. \quad (8.51)$$

(2.a) Queremos determinar para que valores de $P > 0$ temos que $\frac{dP}{dt} = 0$. A estes valores chamáremolos P_e . Posto que

$$0 = rP_e\left(1 - \frac{P_e}{K}\right) - hP_e, \quad (8.52)$$

temos que ou ben $P_e = 0$ ou ben

$$r\left(1 - \frac{P_e}{K}\right) - h = 0. \quad (8.53)$$

Posto que a poboación P ten que ser positiva, temos que desbotar a opción $P_e = 0$, e a única solución é

$$P_e = K\left(1 - \frac{h}{r}\right). \quad (8.54)$$

Ademais, empregando novamente que $P_e > 0$, posto que $K > 0$ ten que ser

$$1 - \frac{h}{r} > 0 \quad (8.55)$$

de onde resulta a condición $h < r$.

(2.b) Consideramos a función

$$f(h) = hP_e = hK\left(1 - \frac{h}{r}\right) = hK - \frac{h^2K}{r}, \quad (8.56)$$

que temos que maximizar. Temos que

$$f'(h) = K - \frac{2hK}{r}, \quad (8.57)$$

de onde $f'(h) = 0$ cando $h = \frac{r}{2}$. Posto que

$$f''(h) = -\frac{2K}{r} < 0 \quad (8.58)$$

sabemos que se trata dun máximo relativo. Finalmente, para ese valor de $h = \frac{r}{2}$ a taxa de captura é

$$hP_e = hK \left(1 - \frac{h}{r}\right) = \frac{r}{2}K \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{rK}{4}. \quad (8.59)$$

(2.c) O rendemento máximo sostíbel (RMS) prodúcese cando a colleita hP é máxima, o que ocorre na poboación $P = K/2$ segundo o obtido na ecuación (8.49) (o punto de crecemento máximo no modelo loxístico). Con outras palabras, no punto $P = K/2 = 5000$, a poboación medra con maior rapidez. Entón

$$\text{RMS} = \frac{0,4 \cdot 10.000}{4} = 1.000 \text{ toneladas anuais}. \quad (8.60)$$

(2.d) Se a taxa de captura é $hP = 1.500$, temos que o valor é superior ao RMS obtido no apartado anterior que é $\text{RMS} = 1.000$. Nestas condicións a poboación non poderá repoñerse, o que provocará un declive co tempo. Se se mantén a situación, esta sobrepesca podería provocar o colapso da poboación de rodaballo. As políticas pesqueiras deben garantir

$$hP \leq \text{RMS} \quad (8.61)$$

para manter unha poboación sostíbel e evitar danos económicos e ecolóxicos a longo prazo.

□

Tarefa extra 8.3. Un dos problemas máis complexos que se resolveron nos últimos tempos é a reprodución do polbo (*Octopus vulgaris*) en cautividade. Aínda que na natureza o proceso leva facéndose milleiros de anos, cando están en cautividade, logo da reprodución e no momento de ser paralarvas, morrían masivamente aos 40 días sen pasar á fase de xuvenís. Coas novas técnicas desenvolvidas, non só superaron esa barreira, senón que as paralarvas chegan sen problemas aos 100 días, con dous gramos de peso. Convén ter presente que a captura a nivel mundial do polbo chegou a 375.000 toneladas en 2021, máis de 10 veces a cantidade do ano 1950, en descenso nos últimos anos debido entre outros factores á sobreexplotación.

Actualmente, a probabilidade de que un polbo criado en cautividade chegue á idade adulta é do 0,1 %. O paso dos polbos dos tanques de cría aos tanques de engorde, faise manualmente, é dicir, cóllense os polbos dun en un (vivos ou mortos).

Unha vez que chegan á vida adulta, trasvásanse os polbos dos tanques de cría aos tanques de engorde. É unha operación que se realiza manualmente, é dicir, cóllense os polbos dun en un tanto vivos coma mortos (seleccionanse indistintamente e ao chou).

1. Cal é a probabilidade de que o primeiro polbo que collamos sexa o primeiro que chegou á idade adulta?
2. Novamente, cal é a probabilidade de que o primeiro polbo que collamos sexa o segundo que chegou á vida adulta? E de que fose o quinto?
3. Dá a función masa de probabilidade da variábel «número de polbos collidos ata atopar o primeiro que chegou á vida adulta», é dicir, a expresión xeral de valores que pode tomar a variábel e a fórmula xeral da probabilidade.
4. Sabendo que en xeral a esperanza e a varianza dunha distribución como esta están dadas por

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}, \quad (8.62)$$

onde p é a probabilidade determinada no primeiro apartado, cantos polbos cabe esperar que se teñan que coller antes de atoparse cun polbo en fase adulta e vivo.

Solución. Antes de comezar a resolver a tarefa, consideramos acaído acompañar unha foto dun polbo galego —*Octopus vulgaris*— na ría de Arousa. Fotografía de Ángel M. Rey



Sexa a variábel aleatoria

X = número de polbos collidos ata atopar o primeiro en chegar á vida adulta, (8.63)

Dos propios datos do enunciado temos que

$$P(X = 1) = p = 0,001 \quad (8.64)$$

Se denotamos os sucesos

E_i = chegou á vida adulta o polbo no trasvase i ,

E_i^c = o complementario,

temos:

$$P(X = 2) = P(E_1^c \cap E_2) = (1 - p)p = 0,999 \cdot 0,001 = 0,000999, \quad (8.65)$$

De xeito semellante, por exemplo

$$P(X = 5) = P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4^c \cap E_5) = (1 - p)^4 p = 0,999^4 \cdot 0,001 = 0,000996006. \quad (8.66)$$

En xeral, observamos que temos que a variábel X ten función masa de probabilidade:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.67)$$

é dicir, unha variábel aleatoria xeométrica de parámetro p , definida como número de intentos antes de obter o primeiro éxito nun experimento con ensaios independentes. En consecuencia

$$E(X) = \frac{1}{p} = 1000. \quad (8.68)$$

□

Tarefa extra 8.4. A pesca submarina é unha modalidade de pesca deportiva na que a persoa que a practica debe mergullarse no mar para buscar o peixe ou cefalópodo que quere capturar. Trátase dunha modalidade de pesca selectiva e sustentábel que respecta o medio ambiente en comparación con outras modalidades de pesca tanto deportivas coma profesionais. En Galiza conta cunha gran tradición e son moitas as persoas que a practican en comparación con outras comunidades autónomas (arredor de 4.000 persoas no ano 2024). Loxicamente, tamén conta con restricións, aínda que unha delas que afecta ao calendario (nos meses de outubro a maio non se pode practicar a pesca submarina de luns a venres, agás os días festivos) non conta cunha xustificación clara, nin científica nin ambiental que as avale. Para coñecer máis sobre a pesca submarina en Galiza, pódese visitar a páxina web da Asociación Galega de Pescadores Submarinos Responsables [AGPESUR](#) e tamén a páxina web da Federación Galega de Actividades Subacuáticas [FEGAS](#).

O Club Sargo de Pesca Submarina –SARPESUB– organizou o primeiro campionato en Galiza desta especialidade deportiva neste ano. No seu regulamento de competición estableceu as seguintes limitacións en canto ás capturas:

1. O peso mínimo de cada peza será dun quilo.
2. Só se poderán capturar peixes a excepción do peixe lúa, os batoideos (raias ou mantas), os peixes planos (peixe sapo, rodaballo, linguado, sollo etc.), os congrios, as morenas e os escualos.
3. Poderanse capturar ata un máximo de sete pezas por especie, agás para a robaliza e o peixe porco que será dun máximo de cinco pezas.
4. Consideraranse pezas válidas todas as que cumpran os requisitos 1) e 2); todas as pezas non válidas suporán unha penalización na puntuación.
5. A persoa que incumpra o establecido en 3) quedará descualificada.

Tamén se estableceu un sistema de puntuación no que se teñen en conta o peso total das pezas válidas capturadas polo pescador/a (outórgase un punto por cada gramo), o número de pezas válidas, o número de pezas non válidas e o número de especies diferentes capturadas, sumando as puntuacións correspondentes a cada un destes catro apartados.

Despois de que todas as persoas deportistas botasen pescando as cinco horas estipuladas, tras o regreso a porto e entregadas as pezas capturadas, comezou a pesaxe e o establecemento da puntuación que corresponde a cada persoa, nun acto público que xera moita expectación e nerviosismo entre as e os deportistas e as súas persoas achegadas.

A información íase amosando nunha pantalla.

1. Despois da pesaxe das pezas capturadas polos tres primeiros/as deportistas, a pantalla amosaba o seguinte:

Deportista	Peso total das pezas válidas	Número de pezas válidas	Número de pezas non válidas	Número de especies	Puntos totais
Conchita	16,840 kg	9	1	3	30.840 ptos.
Tomás	14,230 kg	8	1	2	25.230 ptos.
Alberte	18,540 kg	10	1	4	36.540 ptos.

Nese momento, unha das deportistas maniféstalles ás xuízas da proba que é evidente que as puntuacións amosadas non poden ser correctas. Poderías xustificar o por que?

2. Unha vez revisadas as puntuacións outorgadas a estes tres deportistas, as xuízas comunicánlles ás persoas presentes que debe corrixirse a puntuación total de Alberte, que pasa a ser de 35.540 puntos. Tendo en conta esta corrección, puntuáronse as e os deportistas co mesmo criterio? Xustifica a resposta.

3. Á vista da información facilitada ata o momento, podes saber a puntuación que se outorga por cada peza válida? E por cada especie? E de cantos puntos é a penalización por cada peza non válida?

4. Uns minutos máis tarde, amósase na pantalla a puntuación correspondente ao cuarto deportista:

Deportista	Peso total de pezas válidas	Número de pezas válidas	Número de pezas non válidas	Número de especies	Puntos totais
Conchita	16,840 kg	9	1	3	30.840 ptos.
Tomás	14,230 kg	8	1	2	25.230 ptos.
Alberte	18,540 kg	10	1	4	35.540 ptos.
Anxo	15,380 kg	9	0	4	32.380 ptos.

Con esta nova información, poderíase saber agora a puntuación que corresponde por cada peza válida e por cada especie capturada? Xustifica a túa resposta. No caso de que sexa posíbel, calcula cales serían esas puntuacións e de cantos puntos sería a penalización por cada peza non válida.

Solución. (1) Designemos por

- a : puntuación outorgada por cada peza válida.
- b : puntuación detraída por cada peza non válida (penalización).
- c : puntuación outorgada por cada especie.

Se temos en conta a información que se reflicte na táboa de puntuacións das tres persoas que participan, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} 16.840 + 9a - b + 3c = 30.840, \\ 14.230 + 8a - b + 2c = 25.230, \\ 18.540 + 10a - b + 4c = 36.540, \end{cases} \quad (8.69)$$

que nos permiten obter o seguinte sistema de ecuacións

$$\begin{cases} 9a - b + 3c = 14.000, \\ 8a - b + 2c = 11.000, \\ 10a - b + 4c = 18.000. \end{cases} \quad (8.70)$$

Podemos expresar de forma matricial o sistema (8.70) mediante

$$AX = B, \quad (8.71)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \\ 10 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14.000 \\ 11.000 \\ 18.000 \end{pmatrix}. \quad (8.72)$$

Se estudamos os rangos das matrices A e $(A|B)$, podemos comprobar que $\det(A) = 0$, polo que o rango da matriz A non pode ser tres. Ademais, posto que o determinante do menor de orde 2 da matriz A

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.73)$$

é distinto de cero, entón podemos afirmar que $\text{rang}(A) = 2$. Por outra banda, en canto á matriz $(A|B)$, o menor de orde 3 conformado polas tres últimas columnas

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 14.000 \\ -1 & 2 & 11.000 \\ -1 & 4 & 18.000 \end{pmatrix} \quad (8.74)$$

ten determinante distinto de cero, o que nos permite afirmar que $\text{rang}(A|B) = 3$. Polo tanto, obtemos

$$\text{rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{rang}(A|B). \quad (8.75)$$

Logo, segundo o teorema de Rouché-Frobenius, o sistema de ecuacións lineares (8.70) é incompatible, é dicir, non ten solución (non existen valores de a , b e c que cumpran as tres igualdades). Este feito xustifica que as puntuacións outorgadas non poden ser correctas.

(2) Se refacemos as contas tendo en consideración a puntuación total que realmente lle corresponde a Alberte, o sistema de ecuacións que se obtén, expresado en forma matricial, é

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \\ 10 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.000 \\ 11.000 \\ 17.000 \end{pmatrix}. \quad (8.76)$$

Neste caso a matriz

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -1 & 3 & 14.000 \\ 8 & -1 & 2 & 11.000 \\ 10 & -1 & 4 & 17.000 \end{array} \right) \quad (8.77)$$

ten o mesmo rango ca matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -1 & 3 & 14.000 \\ 8 & -1 & 2 & 11.000 \end{array} \right) \quad (8.78)$$

dado que a terceira fila é combinación linear das outras dúas, é dicir $F_3 = 2F_1 - F_2$, (isto tamén significa que a terceira ecuación é combinación linear das dúas primeiras, polo que poderíamos prescindir dela á hora de estudar e resolver o sistema de ecuacións (8.76)); pero a matriz (8.78) ten rango 2 porque xa vimos que ten un menor de orde dous formado polas dúas primeiras columnas con determinante distinto de cero. Xa que logo, posto que

$$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A|B) \quad (8.79)$$

empregando novamente o teorema de Rouché-Frobenius, o sistema de ecuacións é compatible, é dicir, admite solución. Logo, podemos afirmar que puntuaron os e as tres deportistas baixo o mesmo criterio.

(3) Tal e como concluímos no parágrafo anterior, o sistema (8.76) é compatible; pero é compatible indeterminado cun grao de liberdade, xa que

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 \neq 3 = \text{número de incógnitas}. \quad (8.80)$$

Deste xeito, se temos en conta o menor (8.73) que nos permitiu asegurar que $\text{rang}(A) = 2$, podemos resolver os sistema obtendo como valores de a e b os seguintes

$$a = 3.000 - c, \quad b = 13.000 - 6c. \quad (8.81)$$

En definitiva, á vista da información facilitada, non podemos saber con exactitude as puntuacións que se outorgan por cada peza válida e por cada especie, nin a puntuación coa que se penaliza cada peza non válida.

(4) Coa nova información, engádesse unha nova ecuación ao sistema (8.76), polo que obtemos

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \\ 10 & -1 & 4 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.000 \\ 11.000 \\ 17.000 \\ 17.000 \end{pmatrix} \quad (8.82)$$

onde podemos prescindir da terceira ecuación por ser combinación linear das dúas primeiras, tal e como comentamos con anterioridade. Logo, podemos reducir o sistema anterior a

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.000 \\ 11.000 \\ 17.000 \end{pmatrix}. \quad (8.83)$$

Neste caso a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (8.84)$$

ten determinante distinto de cero, polo que para este novo sistema

$$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A|B) \quad (8.85)$$

o que implica que o sistema é compatíbel determinado, é dicir, que ten unha única solución. Para resolvelo, podemos ter en conta os valores de a e b dados en (8.81) xunto coa nova ecuación

$$9a + 4c = 17.000. \quad (8.86)$$

Deste xeito, obtemos como solución

$$a = 1.000, \quad b = 1.000, \quad c = 2.000. \quad (8.87)$$

Polo tanto, a puntuación que corresponde por cada peza válida é de 1.000 puntos, a puntuación por cada especie é de 2.000 puntos e a penalización por cada peza non válida é de 1.000 puntos.



Tarefa extra 8.5. Elabora un texto estruturado en tres partes no que expoñas o seguinte:

1. A túa opinión sobre se a pesca submarina é ou non é unha actividade selectiva, sustentábel e respectuosa co medio ambiente.
2. A túa valoración sobre a restrición que prohibe practicar a pesca submarina de luns a venres, agás os días festivos, nos meses de outubro a maio.
3. A túa opinión sobre a necesidade de fomentar ou non prácticas sustentábeis e reducir o impacto ambiental.

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato, para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (Influencers) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.

Láser

Situación de aprendizaxe 9. O **láser** (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, en inglés) é unha tecnoloxía que produce un feixe de luz moi coherente, monocromático e direccional. A diferenza doutras fontes de luz, como as lámpadas incandescentes ou os **LED** (light-emitting diode), a luz láser está composta por ondas que teñen a mesma lonxitude de onda e están aliñadas en fase, o que permite concentrar unha gran cantidade de enerxía nunha área moi pequena.

Este principio de emisión estimulada foi proposto inicialmente por **Albert Einstein** en 1917, pero non foi ata 1960 cando **Theodore Maiman** conseguiu desenvolver o primeiro láser funcional, utilizando un cristal de rubí. Desde entón, o láser transformou diversas áreas do coñecemento e da industria, con aplicacións que van dende a medicina (cirurxías con láser e corrección da visión) e as telecomunicacións (fibras ópticas) ata a ciencia (experimentos de precisión) e a fabricación (corte e soldadura de materiais).

Nesta situación de aprendizaxe preténdese que o alumnado reflexione sobre o avance da ciencia ao longo da historia e, en particular, da importancia de políticas de igualdade tamén no ámbito científico.

Estímulo 9.1: O láser unha solución en busca de problemas

Desde o seu desenvolvemento no ano 1960, científicos e enxeñeiros de todo o mundo axiña descubriron o enorme potencial que tiña este instrumento capaz de xerar un feixe de radiación electromagnética, coherente, monocromático e que pode dirixirse cara unha dirección concreta focalizándose nunha área moi pequena. Un feixe láser pode concentrar unha densidade de enerxía ou potencia que non son posibles con outras tecnoloxías (agás o feixe de electróns). Por todo iso, as aplicacións dos láseres multiplicáronse, facendo posíbeis diferentes retos científicos que non poderían realizarse doutro xeito.

Proba diso é o papel determinante do láser en 5 dos Premios Nobel de Física outorgados no primeiro cuarto do s. XXI como, por exemplo, o que premiou a detección de ondas gravitacionais, minúsculas flutuacións do «tecido» do espazo-tempo orixinadas en cataclismos cósmicos como a colisión de estrelas masivas ou a fusión de buratos negros. Previstas pola teoría da relatividade xeral en 1918, detectáronse por primeira vez en 2016 no [Observatorio de Ondas Gravitacionais por Interferometría Láser \(LIGO\)](#) polas súas siglas en inglés). Este instrumento consta de dous tramos rectos («brazos») de 4 km cada un e perpendiculares entre si, [polos que viaxan cadanseus feixes láser que se combinan nun detector](#). O paso dunha onda gravitacional pode detectarse porque provoca pequenos cambios na lonxitude dos brazos que producen un patrón de interferencia no sensor. [A direccionalidade, monocromaticidade e coherencia do láser son cruciais para un instrumento que debe detectar cambios de lonxitude de brazo da orde de \$10^{-18}\$ m, mil veces menos que o tamaño dun protón \(\$10^{-15}\$ m\).](#)

Outro exemplo moi importante de como o láser é unha ferramenta capaz de ampliar os límites da ciencia e da tecnoloxía é o reactor de fusión nuclear por confinamento inercial. O confinamento inercial é un dos dous métodos principais que se están a desenvolver para lograr desencadear unha reacción de fusión nuclear controlada que podería proporcionar unha fonte inagotable de enerxía. Nas investigacións realizadas no [Laboratorio Nacional Lawrence Livermore](#), en California (EUA), empréganse preto de 200 láseres para xerar un pulso de radiación ultravioleta cunha enerxía de arredor de 2 MJ —algo menos da enerxía necesaria para ferver un litro de auga— e unha duración duns poucos nanosegundos. É dicir, durante unhas mil millonésimas de segundo diríxese un feixe láser cunha potencia de 500 TW —[máis de dez mil veces o máximo histórico da potencia eléctrica instantánea consumida en España](#)— cara un branco de combustible nuclear do tamaño dun gran de pementa. Esta formidable densidade de potencia quenta o combustible nuclear a máis de 100 millóns de graos Celsius, iniciándose a fusión nuclear.

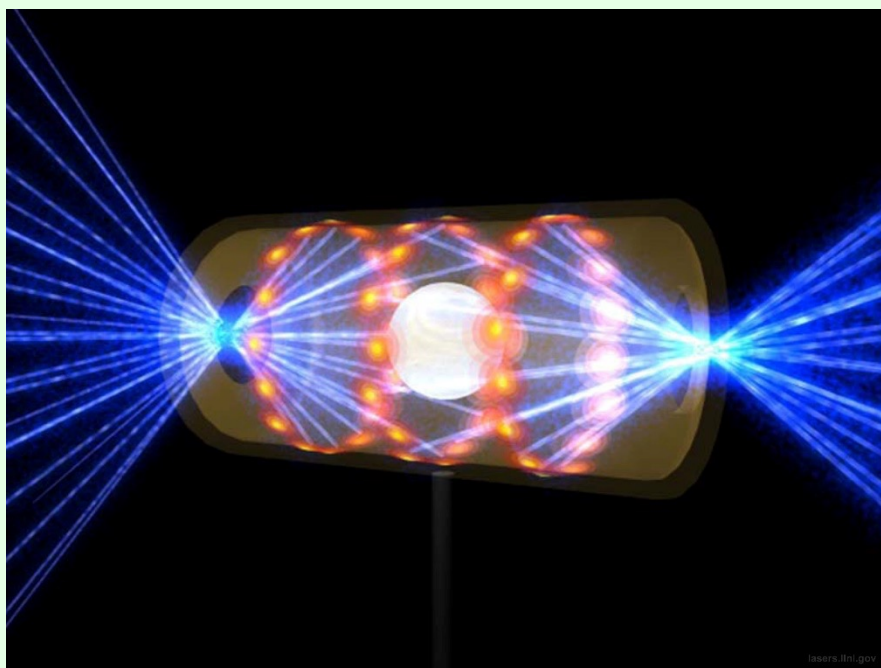
Pero, que é un láser e como se obtén esta radiación tan particular? No corazón do sistema está un medio (sólido, líquido ou gasoso, chamado medio activo) no que se bombea enerxía para levar átomos a un estado excitado. Algúns destes átomos reláxanse de xeito espontáneo emitindo un fotón, e estes fotóns estimulan a relaxación de átomos veciños que, nunha reacción en cadea, emiten fotóns da mesma frecuencia e fase que a luz incidente. Cada medio activo proporciona unha radiación de saída dunha lonxitude de onda característica, de modo que existen fontes láser desde o infravermello (láseres de CO₂) ata o ultravioleta (láseres de excímero). A saída láser pode ser continua ou pulsada, habendo láseres que emiten pulsos de luz extremadamente breves (de femtosegundos, 10^{-15} segundos, ou attosegundos 10^{-18} segundos). Atopamos tamén láseres de moi distinta potencia: desde os milivatios dun punteiro láser ata as decenas de quilovatios dun sistema industrial de procesamento de materiais.

Esta diversidade explica que os láseres non sexan unicamente ferramentas imprescindibles para os grandes desenvolvementos da ciencia, senón que tamén se atopan na medicina e na industria e na nosa contorna máis próxima, como os que se usan para ler os códigos de barras no supermercado ou os que fan posible a transmisión de datos pola fibra óptica que temos na casa. Tamén para xogar ao noso videoxogo preferido insertaremos un disco óptico (Blu-ray, DVD) na unidade de lectura da nosa consola, disco que será lido mediante un láser azul (405 nm) ou vermello (650 nm).

No campo da medicina, o láser tense convertido en ferramenta de uso ordinario en investigación, diagnóstico e terapia, nomeadamente en oftalmoloxía. Por exemplo, usamos luz láser de lonxitude de onda curta, que se absorbe na córnea, para corrixir defectos de visión como a miopía, e luz láser no infravermello, que atravesa o ollo e é absorbida na retina, para diversas terapias de patoloxías retiniais que, [sen tratamento, poderían conducir á perda total de visión](#).

Na industria atopamos láseres de alta potencia en cada vez máis aplicacións, sendo quizais as máis salientables o corte e a soldadura de metais na industria automobilística. Neste caso o láser é unha ferramenta moi superior a outras en canto a velocidade e a calidade dos cortes e soldaduras obtidos. Tamén é moi importante o uso dos láseres para o marcado de materiais; se sabes recoñecelo podes atopar exemplos de marcado con láser por todas partes: desde os símbolos nos botóns do salpicadeiro do teu coche ou do teclado do teu portátil ao número de serie nos instrumentos cirúrxicos, implantes e próteses metálicas; desde o número de lote no blíster das pastillas ou na botella de auga ata o código QR no cartucho da impresora ou no microchip do teu teléfono móbil.

O campo da microelectrónica é, probablemente, o seguinte en importancia nas aplicacións industriais dos láseres. Neste sector os láseres son imprescindibles como ferramenta para fabricar os semicondutores que integran os microchips ou para cortar e mecanizar estes delicados microdispositivos. Por último, un campo de aplicación en crecemento dos láseres industriais é o da fabricación aditiva (tamén coñecido como impresión 3D) para obter pezas plásticas ou metálicas de altísima calidade con total liberdade de formas.



Na imaxe temos unha representación artística dun branco de combustible nuclear do tamaño de un gran de pementa sendo irradiado por un pulso de raios láser que contribúen a crear as condicións nas que pode producirse a reacción de fusión do deuterio e o tritio. Créditos imaxe. [Autor: Lawrence Livermore National Laboratory, CC BY-NC-SA 4.0. Pódese consultar o copyright nesta ligazón.](#)

Texto de **María Cristina Trillo Yáñez** e **Félix Quintero Martínez**. María Cristina Trillo Yáñez é profesora titular de universidade do departamento de Física Aplicada na Universidade de Vigo, e subdirectora de relacións internacionais da [Escola de Enxeñaría Industrial](#). Félix Quintero Martínez é subdirector do [Centro de Investigación en Tecnoloxías, Enerxía e Procesos Industriais da Universidade de Vigo —CINTECX—](#), e profesor titular de universidade do departamento de Física Aplicada na [Universidade de Vigo](#).

Estímulo 9.2: Viñeta de Luís Davila Malvido, “o Bichero”, publicada no xornal *Faro de Vigo*



<https://www.facebook.com/photo/?fbid=752780829542417>

Tarefa 9.1. Tempo estimado para a resolución: 20 minutos. Unha das moitas excelentes pezas depositadas no [Museo de Pontevedra](#) é un [torque de ouro](#) da [época castrexa](#), que mercou a [Deputación de Pontevedra](#) no ano 1896. Para protexelo queren instalar unha serie de luces láser deseñadas por investigadoras da [Universidade de Vigo](#) en certas paredes do [Edificio Sarmiento](#) onde está exposto. As luces non se deben cortar entre si, pois entón saltaría a alarma. Teñen xa unha luz colocada que segue a recta

$$r : \begin{cases} x - 2y - 6z = 1, \\ x + y = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Queren colocar unha segunda luz, no punto $Q(0, 1, 0)$ e posto que non teñen clara a dirección á que debe apuntar, deixan libre un parámetro a no vector director $\vec{v}_s = (2, a, 1)$.

1. Para que valores de a estaría mal situada a recta?
2. Calcula a distancia entre as dúas rectas cando $a = -2$. É unha boa distancia para que non entren a roubar?

Solución. Temos que

$$(1, -2, -6) \times (1, 1, 0) = (6, -6, 3), \quad (9.2)$$

polo que o vector director da recta r é

$$\vec{v}_r = (2, -2, 1). \quad (9.3)$$

Ademais, a recta r pasa polo punto (p.ex.)

$$P_r = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 0\right). \quad (9.4)$$

Da recta s temos $Q_s = (0, 1, 0)$ e $\vec{v}_s = (2, a, 1)$. Polo tanto, posto que

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}, 0\right), \quad (9.5)$$

resulta que

$$\begin{vmatrix} -1/3 & 4/3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = \frac{a+2}{3}. \quad (9.6)$$

Polo tanto, sempre que $a \neq -2$ temos que as rectas se cruzan.

Xusto para $a = -2$ as rectas non se cruzan. Ademais, os vectores directores das rectas r e s son o mesmo, polo que as rectas son paralelas. Neste caso

$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r Q_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{|(4/3, 1/3, -2)|}{|(2, -2, 1)|} = \frac{\sqrt{53}}{9}. \quad (9.7)$$

□

Tarefa 9.2. Tempo estimado para a resolución: 35 minutos. Nunha empresa de gravado e corte de aceiro empregan un láser de emisión continua. Este láser xera un feixe cunha distribución de intensidade que segue un perfil gaussiano en función da distancia radial r desde o eixe do feixe. A intensidade $I(r)$ vén dada por

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right), \quad (9.8)$$

onde as constantes $I_0 > 0$ e $w_0 > 0$ representan a intensidade máxima no centro do feixe ($r = 0$) e o raio do feixe no punto de máxima intensidade, respectivamente.

1. Determina o valor de r para o cal a intensidade do feixe láser é máxima.
2. Existe algún punto de inflexión para a intensidade? Interpreta o resultado.
3. Determina o valor de r para o cal a intensidade $I(r)$ é igual á metade da intensidade máxima.
4. Para unha intensidade máxima dunha unidade e raio de máxima intensidade tamén igual a 1, emprega algún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#) para representar a intensidade.

Solución. (1) Se ben podemos resolver o primeiro apartado directamente observando a función, calculamos a derivada para estudar o comportamento da función. Posto que

$$I'(r) = -\frac{4I_0 r}{w_0^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) < 0, \quad (9.9)$$

temos que $I(r)$ é decrecente, de onde a función $I(r)$ presenta un máximo relativo (e absoluto) para $r = 0$.

(2) Se calculamos a derivada segunda da función $I(r)$ temos

$$I''(r) = -\frac{4I_0 (w_0^2 - 4r^2)}{w_0^4} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right), \quad (9.10)$$

de xeito que a derivada segunda se anula cando

$$r = \pm \frac{w_0}{2}, \quad (9.11)$$

onde empregamos que $w_0 > 0$. No intervalo $(-\infty, -w_0/2)$ temos que $I''(r) > 0$; no intervalo $(-w_0/2, w_0/2)$ temos que $I''(r) < 0$; e no intervalo $(w_0/2, +\infty)$ a derivada segunda é novamente positiva.

Polo tanto, no primeiro intervalo $(-\infty, -w_0/2)$ a función é convexa como r^2 , no segundo intervalo $(-w_0/2, w_0/2)$ a función é cóncava como $-r^2$ e no terceiro intervalo $(w_0/2, +\infty)$ a función é novamente convexa como r^2 . É dicir, nos dous valores de r dados en (9.11) hai senllos puntos de inflexión.

(3) Posto que a intensidade máxima é I_0 (para $r = 0$) temos que determinar o(s) valor(es) de r para os cales

$$I(r) = \frac{I_0}{2}, \quad (9.12)$$

é dicir

$$I_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) = \frac{I_0}{2}. \quad (9.13)$$

Posto que $I_0 > 0$ a igualdade anterior equivale a

$$\exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) = \frac{1}{2}. \quad (9.14)$$

Aplicamos a función logaritmo neperiano aos dous lados da anterior igualdade e empregamos propiedades dos logaritmos para obter que o(s) valor(es) de r están determinados pola ecuación

$$-\frac{2r^2}{w_0^2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2), \quad (9.15)$$

ou equivalentemente

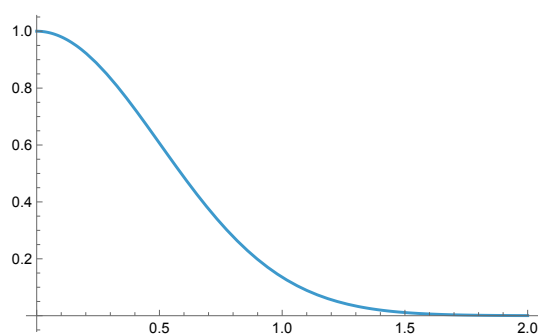
$$r^2 = \ln(2) \frac{w_0^2}{2}, \quad (9.16)$$

de onde

$$r = \pm w_0 \sqrt{\frac{\ln(2)}{2}}. \quad (9.17)$$

Posto que r é unha distancia, a única solución é a positiva.

(4) Para $I_0 = w_0 = 1$ temos a seguinte gráfica



□

Tarefa 9.3. Tempo estimado para a resolución: 15 minutos. Despois de [máis de 20 anos pechado por obras](#) o [Museo Arqueolóxico de Ourense](#) pensa abrir novamente neste século XXI. Dentro dun sistema de seguridade queren instalar un dispositivo láser. Por datos doutras instalacións saben que no sistema se producen alertas por movemento cunha probabilidade do 4 %. O dispositivo láser detecta correctamente movemento no 95 % das situacións. Tamén ten un 2 % de Falsos-Positivos (é dicir, detecta un movemento cando non o é). Que porcentaxe de alertas serán falsos avisos?

Solución. Sexan os sucesos:

M = hai movemento,

LD = o láser detecta movemento.

As probabilidades dadas polo enunciado son:

$$P(M) = 0,04 \quad P(\text{Falsos-Positivos}) = P(LD/\bar{M}) = 0,02 \quad P(LD/M) = 0,95. \quad (9.18)$$

A probabilidade pedida é do suceso: $P(M/LD)$. Aplicando o teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(M/LD) &= \frac{P(LD/M)P(M)}{P(LD/M)P(M) + P(LD/\bar{M})P(\bar{M})} \\ &= \frac{0,95 \cdot 0,04}{0,95 \cdot 0,04 + 0,02 \cdot 0,96} = \frac{0,038}{0,038 + 0,0192} = 0,664. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Polo tanto, e redondeando o 66 % serán avisos reais e o 34 % serán falsos avisos.

□

Tarefa 9.4. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. No laboratorio de Física Aplicada da [Escola de Enxeñaría Industrial](#) da [Universidade de Vigo](#) están a deseñar un sistema láser que emprega tres fontes de enerxía, E_1 , E_2 e E_3 , para xerar a potencia total do láser. As ditas fontes dan enerxía ao sistema total en proporcións diferentes, e as súas contribucións están relacionadas polas seguintes condicións:

- A potencia total xerada polo sistema é $P_{\text{total}} = 100W$.
- A fonte E_1 dá unha enerxía proporcional a E_2 .
- A fonte E_3 dá $20W$ menos que a suma das outras dúas fontes.

Baixo estas condicións:

1. Formula un sistema de ecuacións lineares que relacione as enerxías E_1 , E_2 e E_3 en función das condicións dadas.
2. Resolve o sistema de ecuacións cando sexa posíbel matemática e fisicamente.
3. Despois dos experimentos, queren axustar o sistema cando a fonte E_1 é o dobre de enerxía que E_2 . Cales serán os novos valores de E_1 , E_2 e E_3 ?
4. En que caso consigues anular a primeira fonte de enerxía? E a segunda?

Solución. (1) Podemos formular o sistema de ecuacións do seguinte xeito

$$\begin{cases} E_1 + E_2 + E_3 = 100, \\ E_1 = mE_2, \\ E_3 = E_1 + E_2 - 20. \end{cases} \quad (9.20)$$

Se definimos as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad (9.21)$$

podemos escribir o sistema mediante $AX = B$.

(2) Para $m = -1$ o sistema é incompatíbel pois o determinante de A é cero pero existe un menor de rango tres con determinante distinto de cero na matriz ampliada $(A|B)$. Por outra banda, desde o punto de vista físico non ten ningún sentido que m sexa negativo pois implicaría que habería enerxía negativa nunha das fontes.

Para $m \neq 1$ o sistema é compatíbel determinado e ten por solución

$$E_1 = \frac{60m}{m+1}, \quad E_2 = \frac{60}{m+1}, \quad E_3 = 40. \quad (9.22)$$

(3) Nese caso temos que $E_1 = 2E_2$, ou equivalentemente $m = 2$ polo que a solución vén dada por

$$E_1 = 40, \quad E_2 = 20, \quad E_3 = 40. \quad (9.23)$$

(4) De escollermos $m = 0$ temos que $E_1 = 0$, que resulta obvio desde a segunda condición das tres fontes de enerxía. A segunda fonte de enerxía só se pode anular se $m = \infty$ que non ten sentido físico.

□

Tarefa extra 9.1. Constrúe un texto sobre os avances da ciencia estruturado en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 9.2. Un sistema óptico simple consiste nun láser que emite un feixe de luz cun vector de estado polarizado. A polarización do feixe pode describirse mediante un vector columna no espazo bidimensional:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}, \quad (9.24)$$

onde P_x e P_y son as compoñentes da polarización nas direccións x e y .

O sistema óptico inclúe un polarizador linear que transforma a polarización do feixe de luz. Este polarizador modelízase mediante unha matriz de transformación M , que depende do ángulo θ do eixe do polarizador respecto ao eixe x :

$$M = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\theta) & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

1. Se o vector de polarización inicial do láser é

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

calcula o vector de polarización resultante $\mathbf{P}_{\text{out}}$ despois de pasar polo polarizador con $\theta = \pi/4$.

2. Estuda se se verifica que o cadrado do módulo do vector de polarización $\|\mathbf{P}\|^2 = P_x^2 + P_y^2$ se conserva despois da transformación. Poderías explicar o significado físico do resultado obtido no contexto do feixe láser?
3. Para un feixe con polarización inicial

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

demostra que despois de pasar polo polarizador, o ángulo de polarización ϕ_{out} do feixe de saída está aliñado co valor θ do polarizador.

Solución. (1) Se o ángulo $\theta = \pi/4$ temos que o polarizador é

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

de xeito que

$$M\mathbf{P}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (9.29)$$

polo que

$$\mathbf{P}_{\text{out}} = M\mathbf{P}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (9.30)$$

(2) Consideremos un vector calquera inicial

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (9.31)$$

con cadrado do seu módulo

$$\alpha^2 + \beta^2. \quad (9.32)$$

que ao pasalo polo polarizador se transforma en

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\text{out}} = M\mathbf{P}_{\text{in}} &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\cos^2(\theta) + \beta\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \alpha\sin(\theta)\cos(\theta) + \beta\sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (9.33)\end{aligned}$$

Se calculamos o cadrado do módulo de $\mathbf{P}_{\text{out}}$ dado na ecuación anterior temos

$$(\alpha\cos^2(\theta) + \beta\sin(\theta)\cos(\theta))^2 + (\alpha\sin(\theta)\cos(\theta) + \beta\sin^2(\theta))^2 = (\alpha\cos(\theta) + \beta\sin(\theta))^2, \quad (9.34)$$

onde para chegar á última igualdade empregamos distintas relacións de trigonometría circular. Posto que

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq (\alpha\cos(\theta) + \beta\sin(\theta))^2 \quad (9.35)$$

temos que non se verifica a propiedade de conservación. Isto significa que o polarizador bloquea parte da luz, reducindo a la intensidade transmitida. Esta redución reflicte que parte da enerxía do feixe láser foi absorbida ou desviada.

(3) Neste caso

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\text{out}} = M\mathbf{P}_{\text{in}} &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos^2(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\phi)\sin^2(\theta) + \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi - \theta) \\ \sin(\theta)\cos(\phi - \theta) \end{pmatrix} \\ &= \cos(\phi - \theta) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (9.36)\end{aligned}$$

□

Tarefa extra 9.3. Un raio láser ten unha intensidade que varía radialmente segundo a distancia r ao eixo central do láser. O seu perfil de intensidade pode modelarse por unha función de tipo gaussiano

$$I(r) = I_0 \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) \quad (9.37)$$

onde a intensidade se expresa en watts por m^2 a unha distancia r . Nesa expresión I_0 é a intensidade máxima no eixo central do láser, e w é o ancho do feixe láser, definido como o raio onde a intensidade cae a $1/e^2$ do seu valor máximo.

1. Calcula a potencia total emitida polo láser, integrando sobre todo o perfil radial:

$$P_{\text{total}} = \int_{\text{área}} I(r) dA = \int_0^\infty I(r) 2\pi r dr. \quad (9.38)$$

2. Calcula a porcentaxe de potencia contida dentro dun raio igual ao ancho do feixe $R = w$, sabendo que a potencia contida nun raio S é

$$P_S = \int_S I(r) dA = \int_0^S I(r) 2\pi r dr. \quad (9.39)$$

3. Determina a porcentaxe de potencia contida nun raio igual ao ancho do feixe.

Solución. (1) No enunciado deste primeiro apartado xa nos sinalan como converter unha integral de superficie nunha integral nunha variábel, neste caso con límites de integración que varían de 0 a infinito. Polo tanto

$$P_{\text{total}} = \int_{\text{área}} I(r) dA = \int_0^\infty I(r) 2\pi r dr = \int_{r=0}^\infty I_0 \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) 2\pi r dr, \quad (9.40)$$

onde agora podemos extraer a constante π e a potencia inicial, tamén constante, para chegar a

$$P_{\text{total}} = \pi I_0 \int_{r=0}^\infty \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) 2r dr, \quad (9.41)$$

Se agora multiplicamos e dividimos por $-w^2$, tamén constante, obtemos

$$P_{\text{total}} = -w^2 \pi I_0 \int_{r=0}^\infty \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) \left(-\frac{2r}{w^2}\right) dr, \quad (9.42)$$

de xeito que a primitiva é inmediata xa que temos a derivada do expoñente. Xa que logo, ao aplicarmos a regra de Barrow

$$P_{\text{total}} = -w^2 \pi I_0 \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) \Big|_{r=0}^\infty. \quad (9.43)$$

Para determinar o valor no infinito só temos que avaliar

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) = 0, \quad (9.44)$$

e o valor no punto $r = 0$ é $e^0 = 1$, polo que o resultado é

$$P_{\text{total}} = -w^2 \pi I_0 (0 - 1) = w^2 \pi I_0. \quad (9.45)$$

(2) Temos que calcular

$$P_R = \int_S I(r) dA = \int_0^R I(r) 2\pi r dr = \int_0^w I_0 \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) 2\pi r dr, \quad (9.46)$$

onde novamente podemos sacar fóra da integral as constante I_0 e π ,

$$P_R = \int_S I(r) dA = I_0 \pi \int_0^w \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) 2r dr, \quad (9.47)$$

multiplicamos e dividimos pola constante $-w^2$,

$$P_R = \int_S I(r) dA = -w^2 I_0 \pi \int_0^w \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) \frac{-2r}{w^2} dr, \quad (9.48)$$

para termos unha primitiva inmediata, de xeito que ao aplicar a regra de Barrow

$$P_R = \int_S I(r) dA = -w^2 I_0 \pi \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) \Big|_{r=0}^{r=w}. \quad (9.49)$$

A diferenza do caso anterior, agora no punto $r = w$ temos

$$-\frac{I_0 \pi w^2}{e}, \quad (9.50)$$

e no punto $r = 0$ temos

$$I_0 \pi w^2 \quad (9.51)$$

polo que

$$P_R = \int_S I(r) dA = \frac{(e - 1) I_0 \pi w^2}{e}. \quad (9.52)$$

(3) Calculamos

$$\frac{P_R}{P_{\text{total}}} \cdot 100 = \frac{w^2 \pi I_0}{\frac{(e-1) I_0 \pi w^2}{e}} \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot 100 \approx 63,21 \%. \quad (9.53)$$

Polo tanto, nese raio temos o 63,21 % da intensidade.

□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato, para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (Influencers) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.

Concerto de Taylor Swift

Situación de aprendizaxe 10. O chamado The Eras Tour comezou o 17 de marzo de 2023 en Glendale, Arizona, e rematou o 14 de decembro de 2024 en Vancouver (Canadá).

Os números asociados a esta xira poden ser realmente abrumadores. Por outra banda, millóns de persoas no mundo gozan da música a niveis moito máis próximos e con certeza na túa aula, ou mesmo ti, tes algunha compañeira/o que toca algún instrumento. En xeral, alén das bondades da música para o benestar físico e mental, considérase de axuda para a diversión e as relacións persoais.

Non existe unha cultura fóra dunha sociedade e tampouco existe unha sociedade que non teña unha cultura, simplemente son as dúas caras dunha mesma moeda, as dúas caras deste folio que se tocan, que é o mesmo e contén informacións distintas.

A cohesión social designa, en socioloxía, o grao de consenso dos membros dun grupo social ou a percepción de pertenza a un proxecto ou situación común. É unha medida da intensidade da interacción social dentro do grupo.

A cooperación é a base da cohesión social. Compartir é a clave da cohesión. As actividades, crenzas e procesos compartidos xeran unha forte cohesión social, é dicir, o sistema de cultura debe axudar a manter un grupo social unido e cun obxectivo común. Preténdese que o alumnado reflexione sobre o impacto económico de determinados concertos, en comparación coa economía que xera a música a pequena escala. Tamén, sobre a importancia do ensino de artes para o desenvolvemento como persoas.

Estímulo 10.1. Moito máis que música: The Eras Tour como paradigma da industria musical

O pasado mes de maio de 2024, a cantante Taylor Swift fixo escala na capital de España no marco da xira internacional The Eras Tour, un evento calificado de extraordinario polos medios, dado o impacto xerado a todos os niveis. Os datos dos concertos en Madrid son parte e reflexo dos que tivo esta xira artística polo mundo. Un medio de comunicación resumiunos así:

A xira da estrela estadounidense Taylor Swift, The Eras Tour, alcanzou un novo fito na historia da industria musical tras recadar máis de 2.000 millóns de dólares en venda de entradas, informou este luns *The New York Times*. A produtora da cantante informou o xornal estadounidense de que nos 21 meses que durou a xira gañouse un total de 2.077.618.725 dólares, o equivalente ao dobre de calquera outra xira de concertos da historia. The Eras Tour que concluíu na noite do domingo na cidade canadense de Vancouver, foi vista por máis de 10 millóns de persoas repartidas polos cinco continentes, o que a converteu nunha das máis exitosas da historia da música. (Los Ángeles, 9 de decembro [EFE]. [Eldiario.es](https://www.eldiario.es)).

Iso si, entre os motivos deste éxito hai que ter en conta o acerto da cantante e de todo o seu equipo artístico, á hora de crear unha proposta que combine música de diferentes estilos como o country, o pop, o rock ou o máis indie, con letras que conectan emocionalmente cun público globalizado. E todo iso cunha posta en escena espectacular, con sorpresas non por esperadas menos eficaces, en todos os concertos.

Máis aló dos sentimentos e emocións que as cancións espertan no público espectador, esta xira e en xeral, todas as actuacións semellantes, son posibles grazas a unha produción moi complexa que non se pode separar do que hoxe se coñecen como «industrias culturais»: como o seu nome suxire, unha tradución ao campo da creación de modelos produtivos propios do marco capitalista na súa fase postindustrial.

A planificación de espectáculos desta envergadura vai dende a venda de entradas ata o deseño de todo o *merchandising* asociado ao evento; e máis aló das actuacións concretas da produtora, supón decisións dos responsables económicos, sociais e políticos dos lugares onde se desenvolve a xira. Por exemplo, a venda de entradas combina diferentes canles como a compra directa a través de plataformas de internet, a compra dentro de paquetes turísticos asociados á asistencia a concertos ou a compra física no despacho de billetes. En xiras como a de Taylor Swift, a demanda de entradas superou a capacidade dos espazos o que, segundo diversas informacións, provocou revendas con subidas de prezos dende os 200 € iniciais ata os 1.500 €. Aínda que non é algo que se poida cuantificar con exactitude polo carácter irregular deste mercado, convén ter en conta, á marxe dos beneficios declarados polo produtor, unha importante cantidade de diñeiro en beneficio destes intermediarios.

Entre os resultados económicos asociados a este evento ocupan un lugar moi destacado todos os relacionados coa loxística da propia montaxe e, máis aínda, os derivados da mobilidade dos miles de asistentes. No caso dos concertos en Madrid, estímase un impacto de 20 millóns de euros en todos os distintos sectores implicados, principalmente hostalaría e transporte. En Vancouver esta estimación alcanza os 160 millóns de dólares e, en Londres, nada menos que 1.000 millóns de dólares en oito concertos con máis de 750.000 espectadores. É certo que non en todos os lugares o resultado foi similar, dado que o impacto está en función de variables como o número de concertos ofertados, a capacidade dos diferentes espazos, o prezo das entradas ou o éxito de venda de produtos relacionados co *merchandising*. Pero o que está claro é que os 149 concertos realizados nesta xira, cunha media de entre 70.000 e 80.000 espectadores/as por espectáculo, son un fenómeno digno de estudo. De feito, a Universidade de Harvard (EUA) propuxo en 2024 o curso: «Taylor Swift and Her World» dedicado a analizar o impacto mediático e cultural da artista.

Aínda que lles poida parecer un pouco excéntrico aos académicos máis conservadores, o certo é que os estudos sobre o consumo musical, sobre todo no ámbito da música popular, son cada vez máis numerosos e precisos, con implicacións prácticas directas nas estratexias de produción e difusión destas músicas. Pódese avaliar estatisticamente a partir de cuestionarios, informes e estudos de campo, a relación entre variables como o poder adquisitivo do público, o nivel educativo, a idade, a dispoñibilidade para acceder a diversos medios (internet, televisión, prensa e revistas...), a identidade de xénero, a identidade étnica etc. e o consumo de xéneros musicais específicos como pop, rock, techno, folk, reguetón etc.

E aínda que é máis impreciso, xa que se basea en categorías desenvolvidas a partir do cruzamento dos datos facilitados polo público consumidor e non directamente a partir dos resultados brutos dos cuestionarios, pódese tamén relacionar estes consumos con determinados comportamentos ou *habitus*, ou coa clase social no seu sentido máis amplo de combinación de diferentes niveis de «capital»: económico, social, simbólico e cultural. Incluso, a través de estatísticas de análise factorial, observando que diferentes produtos son elixidos polo mesmo consumidor, e confirmando que esta asociación de produtos nun mesmo consumidor é un patrón repetido en moitos consumidores/as, pódese inferir que aqueles produtos —diversos— comparten «algo» que os fai obxecto de elección polo mesmo consumidor ou clase de consumidores; e, deste xeito, vincular o consumo dun produto musical con outros produtos como comida, roupa, viaxes etc.

Por último, e volvendo a eventos como os xa citados concertos da xira de Taylor Swift, todo o que brilla non sempre é ouro. Desde diferentes posturas cuestionouse o impacto negativo que teñen este tipo de espectáculos. Por exemplo, o movemento específico de miles de persoas ten un efecto directo sobre a contaminación, tanto nas emisións de CO₂ coma na xeración de residuos, que no caso das actuacións realizadas en cidades pequenas ou en espazos rurais, como ocorre con moitos festivais de verán, non contan coa infraestrutura axeitada para a súa correcta xestión. Movementos críticos co turismo de masas e a deterioración que provoca sinalan a contribución destes eventos a eses efectos nocivos. No caso dos concertos celebrados en Madrid, a veciñanza denunciou directamente o incumprimento da normativa sobre ruídos molestos. O adxectivo «terremoto» co que adoitan referirse os medios ao éxito deste tipo de xiras, pódese tomar ao pé da letra: medidas tomadas durante un dos concertos de Taylor Swift, rexistraron movementos sísmicos de nivel 2,3 provocados polas vibracións sonoras e o movemento simultáneo de miles de fans. Quizais, coma en tantos outros aspectos do consumo desenfreado na nosa vida posmoderna, deberíamos reflexionar e considerar a alternativa de desescalar os produtos musicais cara a eventos de proximidade e en comunidades máis personalizadas.

Texto de **Luís Costa Vázquez**, catedrático de Musicoloxía no Conservatorio Superior de Música de Vigo, profesor asociado na Universidade de Vigo e director dos grupos de traballo de «Análise musical II», «Historia da música e da danza» e «Coro e técnica vocal II» na PAU.

Estímulo 10.2: Viñeta de Xosé Lois González Vázquez, “o Carrabouxo”, publicada no xornal *La Región*



<https://carrabouxo.es/2021/11/11/carra9-11-21/>

Estímulo 10.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, “o Bichero”, publicada no xornal *Faro de Vigo*



<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=650771563761119>

Estímulo 10.4: Viñeta de Pablo Prado, “Fuco” no xornal *Novas do Eixo Atlántico*



https://www.instagram.com/p/CYmLw7HMSac/?img_index=4

Tarefa 10.1. Tempo estimado para a resolución: 25 minutos. Os equipos técnicos, encabezados por [Ricardo Portela](#), comezan a colocar os equipos de son e de iluminación para o concerto que terá lugar no auditorio [Avelino Cachafeiro](#). Teñen tres puntos nos que queren localizar focos de luz: $P(10, -10, 30)$, $Q(10, 20, 10)$ e $R(10, 0, -10)$.

1. A distancia entre o punto P e a recta que pasa polos puntos Q e R ten que ser maior ca 30 metros pola configuración do escenario. Está ben situado o punto P ?
2. Un dos problemas clásicos nos concertos é que as e os músicos teñan un bo retorno de son, é dicir, que o sinal que reciben polos “peringallos” sexa correcto: teñen que escoitar o que tocan e tamén o que están a tocar o resto de membros do grupo ou banda. Para iso a área da parte do escenario limitada polo triángulo que ten por vértices os puntos P , Q e R non debe superar os 600 m² (relaciona as dimensións co explicado nos estímulos 10.1 e 10.3). É correcta a disposición dos tres puntos?
3. Finalmente queren colocar un cuarto foco de luz nun punto S no plano que determinan os puntos P , Q e R de xeito tal que o cuadrilátero de vértices P , Q , R e S sexa un paralelogramo. En que posicións poden localizar ese novo punto S ?

Solución. (1) En primeiro lugar calculamos

$$\overrightarrow{QR} = (0, -20, -20), \quad \overrightarrow{QP} = (0, -30, 20). \quad (10.1)$$

Temos entón

$$|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -20 & -20 \\ 0 & -30 & 20 \end{vmatrix} = |(-1.000, 0, 0)| = 1.000. \quad (10.2)$$

Polo tanto,

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{QR}|} = \frac{1.000}{20\sqrt{2}} = 25\sqrt{2} \approx 35.35 \text{ metros} \quad (10.3)$$

polo que o punto P está ben situado.

(2) A área do triángulo vén dada por

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP}| = \frac{1.000}{2} = 500 \text{ m}^2, \quad (10.4)$$

o que implica que a posición dos tres puntos é correcta.

(3) Determinamos en primeiro lugar o plano π que contén os puntos P , Q e R :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-10 \\ -30 & -20 & y \\ 20 & -20 & z+10 \end{vmatrix} = 1.000(x-10). \quad (10.5)$$

Temos entón que a ecuación do plano π é

$$x-10=0. \quad (10.6)$$

Finalmente resolvemos dun xeito moi simple onde ten que estar o punto S para termos un paralelogramos, caso por caso (de fixarmos unha orde como pode ser as agullas do reloxo poderíamos reducir o número de casos):

1. Se P , Q e R son vértices consecutivos temos que

$$S = P + \overrightarrow{QR} = (10, -10, 30) + (0, -20, -20) = (10, -30, 10). \quad (10.7)$$

2. Se R , P e Q son vértices consecutivos temos que

$$S = R + \overrightarrow{PQ} = (10, 0, -10) + (0, 30, -20) = (10, 30, -30). \quad (10.8)$$

3. Se Q , R e P son vértices consecutivos temos que

$$S = Q + \overrightarrow{RP} = (10, 20, 10) + (0, -10, 40) = (10, 10, 50). \quad (10.9)$$

4. Se P , R e Q e son vértices consecutivos temos que

$$S = P + \overrightarrow{RQ} = (10, -10, 30) + (0, 20, 20) = (10, 10, 50). \quad (10.10)$$

5. Se R , Q e P e son vértices consecutivos temos que

$$S = R + \overrightarrow{QP} = (10, 0, -10) + (0, -30, 20) = (10, -30, 10). \quad (10.11)$$

6. Se Q , P e R son vértices consecutivos temos que

$$S = Q + \overrightarrow{PR} = (10, 20, 10) + (0, -10, 40) = (10, 30, -30). \quad (10.12)$$

Observamos que coinciden os valores para o punto S nos pares $(1,5)$, $(2,6)$ e $(3,4)$, polo que os posibles valores para S son os tres seguintes:

$$S = (10, 30, -30), \quad S = (10, 10, 50), \quad S = (10, -30, 10). \quad (10.13)$$

É doado comprobar que os tres puntos posibles están contidos no plano π que ten por ecuación $x = 10$.

□

Tarefa 10.2. Tempo estimado para a resolución: 35 minutos. Desde a organización do concerto o espazo onde estarán as persoas «máis swifties» está limitado por un río que ten a súa beira segundo a curva

$$f(x) = |x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x|, \quad x \in [-100, 900]. \quad (10.14)$$

Como obxectivo final preténdese saber canto espazo teñen reservado para as entradas VIP. As persoas con entradas VIP estarán na rexión limitada pola curva $y = f(x)$, as rectas $x = 0$ e $x = 3$, así como polo eixe OX onde está a fachada do bar no intervalo $[0, 3]$.

1. Determina, se existen, os puntos comúns entre a beira do río e a fachada do bar.
2. Determina, se existe, os puntos da beira do río situados na zona VIP localmente máis afastados da fachada bar.
3. Representa o espazo onde están situadas as persoas con entrada VIP.
4. Comproba o resultado obtido coa axuda dalgún software como [Geogebra](#), [Sage](#) ou [Maxima](#).
5. Calcula a área do espazo reservado para as entradas VIP, se as unidades son en centos de metros cadrados.
6. Se o número recomendado nun concerto é de dúas persoas por metro cadrado, cantas entradas VIP poden vender?

Solución. (1) Para determinar os puntos de corte con OX resolvemos $f(x) = 0$ de onde resulta

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad x = 3. \quad (10.15)$$

Xa que logo, os puntos onde coinciden a beira do río mais o bar están nos puntos $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(3, 0)$.

(2) En primeiro lugar redefinimos a función eliminando o valor absoluto. Para iso temos que analizar o signo de $g(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$ nos intervalos definidos polos puntos onde se anula $f(x)$, e a variación máxima de x . No intervalo $(-100, 1)$ temos que $g(x) > 0$; no intervalo $(-1, 0)$ $g(x) < 0$; no intervalo $(0, 2)$ temos que $g(x) > 0$; no intervalo $(2, 3)$ novamente $g(x) < 0$; finalmente no intervalo $(3, 900)$ temos que $g(x) > 0$. Polo tanto, podemos redefinir

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x, & x \in [-100, -1], \\ -(x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x), & x \in (-1, 0], \\ x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x, & x \in (0, 2], \\ -(x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x), & x \in (2, 3], \\ x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x, & x \in (3, 900]. \end{cases} \quad (10.16)$$

Poderíamos ter escollidos os intervalos abertos ou pechados doutros xeitos, que non inflúe pois nos extremos (agás nos puntos do infinito) temos que $f(x) = 0$.

Para determinar os posíbeis extremos derivamos, sempre en intervalos abertos:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6, & x \in (-100, -1), \\ -(4x^3 - 12x^2 + 2x + 6), & x \in (-1, 0), \\ 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6, & x \in (0, 2), \\ -(4x^3 - 12x^2 + 2x + 6), & x \in (2, 3), \\ 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6, & x \in (3, 900), \end{cases} \quad (10.17)$$

e igualamos a cero. As ecuacións son sempre as mesmas, polo que só temos que resolver unha vez

$$4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 = 0 \quad (10.18)$$

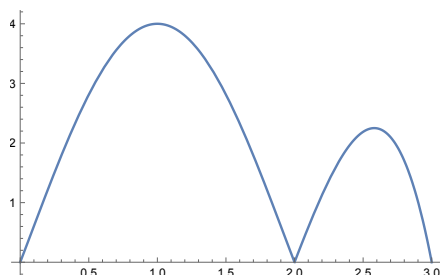
que ten por raíces

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2} (2 - \sqrt{10}) \approx -0,581139, \quad x_3 = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{10}) \approx 2,58114. \quad (10.19)$$

Polo sinalado no enunciado o posíbel extremo x_2 está fóra do dominio onde temos que analizar a función. Antes do punto $x_1 = 1$ a derivada é positiva e despois é negativa, polo que nese punto temos un máximo relativo. No punto x_3 temos a mesma situación. Nos

puntos 0, 2 e 3 obviamente temos mínimos relativos, xa que a función $f(x) = 0$ é onde está situado o bar.

(3-4) A representación da función $f(x)$ no intervalo $[0, 3]$ é a seguinte:



(5) A área do espazo reservado para as entradas VIP vén dado por

$$\begin{aligned} \text{Área(VIP)} &= \int_0^3 f(x) dx \\ &= \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x) dx + \int_2^3 -(x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x) dx \\ &= \left. \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right|_{x=0}^{x=2} - \left. \frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right|_{x=2}^{x=3} = \frac{76}{15} + \frac{22}{15} = \frac{98}{15} \approx 6,533. \quad (10.20) \end{aligned}$$

É dicir, posto que os datos están en centos de metros cadrados a área do espazo reservado para as entradas VIP é de 653,33 m².

(6) Dos datos que se sinalan, sabemos que en cada metro cadrado pode haber dúas persoas, polo que poden vender arredor de 1.307 entradas VIP.

□

Tarefa 10.3. Tempo estimado para a resolución: 35 minutos. O equipo de produción, dirixido polos músicos [Domingo Barreiros](#) e [Pablo Carpintero](#), quere optimizar a distribución de entradas e de persoas asistentes en tres cidades diferentes, para o cal proceden a modelar o impacto de factores externos como a capacidade do estadio, a popularidade local e o axuste dos prezos. Contratan dúas persoas con formación en matemáticas para axudar neste cometido e definen tres variábeis: as entradas previstas, as persoas asistentes previstas e as entradas axustadas por promoción, que denotan por x , y e z , respectivamente.

Para cada unha das cidades (Milán, Lisboa e París) recollen a información en vectores

$$\mathbf{v}_M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_L = \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}. \quad (10.21)$$

Consideran estas matemáticas que o comportamento do público pode controlarse cunha matriz de transformación $\mathbf{T}$ que, multiplicada polos datos reais de entradas e asistentes, nos dá uns valores de previsión:

$$\mathbf{v}_M^{\text{prev}} = \mathbf{T}\mathbf{v}_M^{\text{real}}, \quad \mathbf{v}_L^{\text{prev}} = \mathbf{T}\mathbf{v}_L^{\text{real}}, \quad \mathbf{v}_P^{\text{prev}} = \mathbf{T}\mathbf{v}_P^{\text{real}}, \quad (10.22)$$

onde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.23)$$

e os parámetros a , b e c dependen da localización do concerto.

1. Empregan os valores dos concertos en Milán para ter unha estimación dos posíbeis valores dos parámetros, e obteñen $a = 0,2$, $b = 0,5$ e $c = 0,3$. No caso de Milán realizáronse catro concertos para os cales houbo 190.000 entradas, asistiron 170.000 persoas e houbo 1.000 entradas por promoción. Saben que venderon 224.500 entradas e que houbo 1.000 entradas por promoción. Podes comprobar se os cálculos son correctos?
2. Para os concertos de Lisboa queren ter unha idea de cantas persoas asistirán en función do número de entradas vendidas. Para que valores dos parámetros a , b e c é posíbel coñecer uns valores únicos reais a partir dos previstos? Poderías dar unha expresión para a nova matriz de transformación?
3. Despois de verificar que o modelo funcionaba correctamente nos concertos de Lisboa, podes determinar cantas entradas poden vender para cada un dos catro concertos de París se a capacidade é de 180.000 persoas para todos os concertos, sabendo que houbo 1.000 entradas de promoción?

Solución. (1) Neste caso a matriz $\mathbf{T}$ vén dada por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 1 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.24)$$

Posto que temos os datos reais de persoas asistentes, entradas vendidas e entradas por promoción simplemente realizamos o cálculo

$$\mathbf{v}_M^{\text{prev}} = \mathbf{T}\mathbf{v}_M^{\text{real}} = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 1 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190.000 \\ 170.000 \\ 1.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224.500 \\ 208.300 \\ 1.000 \end{pmatrix}, \quad (10.25)$$

de xeito que deberían ter vendidas 224.500 entradas, que coincide cos datos reais de entradas vendidas. Tamén coinciden o número de entradas por promoción.

(2) Neste caso simplemente necesitamos calcular, cando sexa posíbel a inversa da matriz $\mathbf{T}$. Posto que

$$\det \mathbf{T} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.26)$$

se desenvolvemos polo elemento (3,3) temos que

$$\det \mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2. \quad (10.27)$$

Xa que logo, sempre que $a \neq \pm 1$ será posíbel atopar a matriz de transformación que nos proporcione os datos reais en función da previsión. Noutro caso non é posíbel.

Para $1 - a^2 \neq 0$ podemos calcular a matriz inversa de $\mathbf{T}$ que vén dada por

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{1 - a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a & ac - b \\ -a & 1 & ab - c \\ 0 & 0 & 1 - a^2 \end{pmatrix}. \quad (10.28)$$

(3) No caso dos valores dos parámetros $a = 0,2$, $b = 0,5$ e $c = 0,3$ temos que a matriz $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 1 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.29)$$

Dos datos do enunciado sabemos que $x_P = 180.000$ e $z_P = 1.000$, pero non sinalan o valor de y_P . Se calculamos

$$\mathbf{v}_P^{\text{prev}} = \mathbf{T}\mathbf{v}_P^{\text{real}} = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 1 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180.000 \\ y_P \\ 1.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180.500 + 2y_P \\ 36.300 + y_P \\ 1.000 \end{pmatrix} \quad (10.30)$$

polo que non é posíbel dar o valor exacto, pero si dar o valor en función de y_P . Posto que houbo catro concertos, o valor queda entón

$$\frac{1}{4} (180.500 + 2y_P). \quad (10.31)$$

□

Tarefa 10.4. Tempo estimado para a resolución: 25 minutos. No contexto desta situación de aprendizaxe, a probabilidade de que unha persoa *swiftie* sexa quen de mercar unha entrada nunha conexión á páxina de venda (nun portal non oficial) é de $p = 0,25$ debido á altísima demanda, a limitada dispoñibilidade de entradas, e a que o portal de venda de entradas dá numerosos problemas durante o proceso. Cinco amigos queren asistir ao concerto e cada un deles tenta mercar a súa entrada de xeito independente. Queremos analizar canto tempo ten que conectarse á páxina de venda de entradas unha persoa para poder mercar unha entrada. En cada tentativa de mercar a entrada demórase 3 minutos, e por experiencia doutros concertos sábese que en 27 minutos as entradas estarán esgotadas. Asumimos que os intentos de mercar unha entrada son independentes.

1. Cal é a probabilidade de obter a primeira entrada na terceira conexión?
2. Calcula a probabilidade de obter a primeira entrada antes da cuarta conexión?
3. Cal é a probabilidade de obter unha entrada antes de que se esgoten?
4. Cal é a probabilidade de que os cinco amigos asistan xuntos ao concerto?

Solución. (1) Denotamos

F_i = non conseguimos a entrada na conexión i ,

E_i = conseguimos a entrada na conexión i .

A cuestión formulada é equivalente a

$$P(F_1 \cap F_2 \cap E_3). \quad (10.32)$$

Posto que as entradas á páxina son independentes temos

$$P(F_1 \cap F_2 \cap E_3) = P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot P(E_3) = 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 0,14. \quad (10.33)$$

(2) Neste caso podemos conseguir a entrada na primeira conexión, na segunda ou ben na terceira, é dicir, temos que calcular

$$P(E_1) + P(F_1 \cap E_2) + P(F_1 \cap F_2 \cap E_3). \quad (10.34)$$

Novamente empregamos a independencia das conexións na páxina web de venda para obter

$$P(E_1) + P(F_1 \cap E_2) + P(F_1 \cap F_2 \cap E_3) = 0,25 + 0,75 \cdot 0,25 + 0,75^2 \cdot 0,25 = 0,58. \quad (10.35)$$

(3) Posto que cada intento leva tres minutos e as entradas se esgotan aos 27 minutos, temos 9 intentos antes de que as entradas se esgoten. Neste caso a probabilidade pedida (non hai que esgotarse facendo as contas!) é

$$\begin{aligned} &P(E_1) + P(F_1 \cap E_2) + P(F_1 \cap F_2 \cap E_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap E_4) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap E_5) \\ &+ P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5 \cap E_6) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5 \cap F_6 \cap E_7) \\ &+ P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5 \cap F_6 \cap F_7 \cap E_8) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5 \cap F_6 \cap F_7 \cap F_8 \cap E_9) \\ &= 0,93. \end{aligned} \quad (10.36)$$

(4) Dado que cada un dos cinco amigos merca a súa entrada de forma independente e a probabilidade de conseguir antes de que se agoten é de 0,93, definimos

$$X = \text{número de amigos dos 5 que consiguen entrada} \sim \text{Bi}(5; 0,93). \quad (10.37)$$

A probabilidade pedida é 5 dos 5 amigos consigan a entrada:

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0,93^5 \cdot 0,07^0 = 0,6957. \quad (10.38)$$

□

Tarefa extra 10.1. Constrúe un texto sobre a venda de entradas por determinadas plataformas en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 10.2. Durante o concerto en Santiago de Compostela queren proxectar unha luz desde o punto de coordenadas $(1, 0, 1)$ seguindo a traxectoria do vector $\vec{v} = (m, 4, 2)$, onde m é un parámetro real. Na primeira parte do concerto queren que a luz sexa perpendicular á base do escenario que está situada no plano

$$\pi : 2x - y + kz = 0, \quad (10.39)$$

onde k é outro parámetro real. Na segunda parte do concerto, durante unha canción na que sobe ao escenario [Pablo Carpintero](#), queren que a luz estea contida no plano paralelo ao do escenario un metro e medio por riba.

1. Determina m e k para a primeira parte do concerto.
2. Determina m e k para a segunda parte do concerto.

Solución. Escribimos en primeiro lugar a ecuación da recta que seguirá a luz proxectada,

$$r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad (10.40)$$

que pasa polo punto dado $P(1, 0, 1)$ e segue a dirección de $\vec{v}$. Ademais, o vector normal ao plano π vén dado por

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, k). \quad (10.41)$$

(1) No primeiro caso, para que a luz sexa perpendicular ao plano, entón os vectores $\vec{v}$ e $\vec{n}_\pi$ teñen que ser proporcionais, é dicir, ten que existir unha constante real μ tal que

$$\vec{v} = \mu \vec{n}_\pi \Leftrightarrow (m, 4, 2) = \mu(2, -1, k). \quad (10.42)$$

Polo tanto, temos o seguinte sistema de ecuacións

$$m = 2\mu, \quad 4 = -\mu, \quad 2 = \mu k, \quad (10.43)$$

de onde

$$\mu = -4, \quad k = -\frac{1}{2}, \quad m = -8. \quad (10.44)$$

(2) No segundo caso, para que a luz estea no plano que se sinala, primeiro determinamos o plano. Posto que o punto $(0, 0, 0)$ está no plano e queremos que estea 1,5 metros por riba, entón buscamos un plano π_2 que pase polo punto $(0, 0, 3/2)$ e co mesmo vector normal $\vec{n}_\pi$:

$$2x - y + kz = D \quad (10.45)$$

onde D é unha constante para determinar. Ao pasar polo punto $(0, 0, 3/2)$ resulta

$$\frac{3}{2}k = D, \quad (10.46)$$

polo que o novo plano é

$$\pi_2 : 2x - y + k\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0. \quad (10.47)$$

Para que a recta estea contida no plano π_2 necesitamos en primeiro lugar que os vectores $\vec{v}$ e $\vec{n}_\pi$ sexan perpendiculares. Con outras palabras, que o seu produto escalar sexa cero:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow (m, 4, 2) \cdot (2, -1, k) = 0 \Leftrightarrow 2m - 4 + 2k = 0 \Leftrightarrow m + k = 2. \quad (10.48)$$

Para que o punto $P(1, 0, 1)$ estea no plano, simplemente facemos a substitución e resulta

$$2 - \frac{k}{2} = 0, \quad (10.49)$$

polo que a solución é

$$k = 4, \quad m = -2. \quad (10.50)$$

□

Tarefa extra 10.3. Ao comezo da canción «Don't blame me» as luces do escenario están deseñadas para variar a súa intensidade no tempo segundo unha función sinusoidal modulada por unha exponencial, co obxecto de sincronizar luces e son, semellante ao sinalado no estímulo 10.2. A intensidade $I(t)$ das luces en función do tempo vén dada por

$$I(t) = A(1 + \exp(-kt) \sin(\omega t)) \quad (10.51)$$

onde $A > 0$ é a amplitude inicial da luz, k é o coeficiente de atenuación debido á perda de enerxía, ω é a frecuencia angular da modulación sinusoidal, e t é o tempo medido en segundos.

1. En que instantes dos primeiros 5 segundos da canción é posíbel que haxa máis e menos intensidade de luz?
2. Para $\omega = 2$, $A = 25$ e $k = 1$, cales son os instantes de menor e maior intensidade lumínica neses 5 segundos?
3. A enerxía total defínese como a integral do cadrado da intensidade. Determina a enerxía total neses 5 segundos de tempo para os mesmos valores dos parámetros. Como pensas que se deben variar os parámetros para reducir a enerxía?

Solución. (1) Para determinar os instantes nos que hai máis e menos intensidade de luz, determinamos os posíbeis extremos relativos da función $I(t)$. Para isto derivamos

$$\begin{aligned} I'(t) &= A(0 - k \exp(-kt) \sin(\omega t) + \exp(-kt) \omega \cos(\omega t)) \\ &= A \exp(-kt) (-k \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)). \end{aligned} \quad (10.52)$$

Xa que $A > 0$ e a función exponencial non ten raíces reais, os posíbeis extremos da función $I(t)$ son os valores do tempo t para os cales

$$-k \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t) = 0, \quad (10.53)$$

ou equivalentemente

$$\tan(\omega t) = \frac{\omega}{k}. \quad (10.54)$$

É dicir,

$$\omega t = \arctan\left(\frac{\omega}{k}\right) + n\pi \quad (10.55)$$

de onde finalmente

$$t = \frac{\arctan\left(\frac{\omega}{k}\right) + n\pi}{\omega} \quad (10.56)$$

onde n é un número enteiro para o cal $t \in [0, 5]$.

(2) Para os valores dos parámetros no enunciado

$$t = \frac{\arctan\left(\frac{\omega}{k}\right) + n\pi}{\omega} = \frac{1}{2}(n\pi + \arctan(2)) = 0,55357 + \frac{n\pi}{2} \quad (10.57)$$

Os valores de n para os cales t está nos cinco primeiros segundos son $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$. Para $n \geq 3$ os valores son maiores ca 5 e para $n < 0$ os valores serían negativos, que non ten sentido pois non queremos que as luces comecen antes da canción. Para eses valores de n os tempos son

$$t_1 = 0,553574, \quad t_2 = 2,12437, \quad t_3 = 3,69517. \quad (10.58)$$

Analizamos agora se realmente son ou non son extremos relativos da función. Desta volta farémolo analizando o signo da derivada segunda

$$I''(t) = -25 \exp(-t) (3 \sin(2t) + 4 \cos(2t)). \quad (10.59)$$

Temos

$$I''(0,553574) = -64,2748, \quad I''(2,12437) = 13,3614, \quad I''(3,69517) = -2,77757, \quad (10.60)$$

de xeito que a función presenta dous máximos relativos nos puntos t_1 e t_3 e un mínimo relativo no punto t_2 . Debemos analizar os valores da función neses tres puntos e tamén nos instantes inicial e final do intervalo, xa que o cálculo diferencial só detecta posíbeis extremos en intervalos abertos:

$$I(0) = 25, \quad I(5) = 24,9084, \quad I(t_1) = 37,855, \quad I(t_2) = 22,3277, \quad I(t_3) = 25,5555. \quad (10.61)$$

Polo tanto, teremos a maior luminosidade no instante t_1 e a menor luminosidade no instante t_2 .

(3) Temos que calcular

$$\begin{aligned} E &= \int_0^5 I^2(t) dt = \int_0^5 (25 + 25 \exp(-t) \sin(2t))^2 dt \\ &= \int_0^5 625 \exp(-2t) \sin^2(2t) + 1.250 \exp(-t) \sin(2t) + 625 dt. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Hai unha inmediata e dúas que teremos que calcular por partes. A integral inmediata é

$$\int_0^5 625 dt = 3.125. \quad (10.63)$$

Nas outras dúas, após integrar por partes obtemos por unha banda

$$\begin{aligned}\int_0^5 625 \exp(-2t) \operatorname{sen}^2(2t) dt &= \frac{125}{4} e^{-2t} (-2 \operatorname{sen}(4t) + \cos(4t) - 5) \Big|_{t=0}^{t=5} \\ &= \frac{125}{4} \left(4 + \frac{-5 - 2 \operatorname{sen}(20) + \cos(20)}{e^{10}} \right) \approx 124,991, \quad (10.64)\end{aligned}$$

onde empregamos que

$$\operatorname{sen}^2(z) = \frac{1 - \cos(2z)}{2}, \quad (10.65)$$

e ademais a outra integral é

$$\begin{aligned}\int_0^5 1.250 \exp(-t) \operatorname{sen}(2t) dt &= -250 e^{-t} (\operatorname{sen}(2t) + 2 \cos(2t)) \Big|_{t=0}^{t=5} \\ &= -\frac{250 (-2e^5 + \operatorname{sen}(10) + 2 \cos(10))}{e^5} \approx 503,743. \quad (10.66)\end{aligned}$$

Xa que logo,

$$E = \int_0^5 I^2(t) dt = 3753,73 \text{ J}. \quad (10.67)$$

Á vista dos valores dos tres sumandos, o xeito de reducir a enerxía máis evidente é reducir o valor da amplitude inicial A .

□

Tarefa extra 10.4. No contexto desta situación de aprendizaxe, a venda de entradas do concerto (no sitio oficial) está aloxada no famoso portal «unha entrada mestre», onde teremos que mercar entradas. A venda de entradas abre ás 10:00 AM, e facemos a conexión a esa hora. Como hai moita demanda, estamos en listaxe de agarda. A distribución do tempo ata poder entrar segue unha distribución exponencial cun tempo medio de espera de trinta minutos. A continuación amósase a función de densidade desta distribución:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (10.68)$$

1. Cal é o valor do parámetro λ ?
2. No último concerto, as entradas estaban esgotadas á media hora desde a apertura do portal de venda de entradas. Cal é a probabilidade de que quede sen entradas?
3. Pasados 15 minutos, cal é agora a probabilidade de ter que esperar como mínimo outros 15 minutos? Compara esta probabilidade coa probabilidade de ter que agardar polo menos 15 minutos e discute a propiedade resultante.

Solución. (1) Consideramos a variábel

$$T = \text{tempo de espera en minutos.} \quad (10.69)$$

Segundo enunciado, temos que a súa esperanza é $E(T) = 30$. Xa que logo,

$$30 = E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} \frac{t}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt. \quad (10.70)$$

Para aplicar integración por partes, tendo en conta a regra ALPES, derivamos o polinomio e integramos a exponencial. É dicir, escollemos:

$$u = t, \quad \frac{du}{dt} = 1, \quad du = dt \quad (10.71)$$

$$dv = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}, \quad v = -e^{-\frac{t}{\lambda}}. \quad (10.72)$$

Deste xeito obtemos:

$$30 = E(T) = -te^{-\frac{t}{\lambda}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\frac{t}{\lambda}} dt. \quad (10.73)$$

Posto que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-\frac{t}{\lambda}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} te^{-\frac{t}{\lambda}} = 0, \quad (10.74)$$

resulta

$$30 = E(T) = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt = -\lambda e^{-\frac{t}{\lambda}} dt \Big|_0^{+\infty} = 0 + \lambda. \quad (10.75)$$

Da ecuación anterior obtemos que o valor de λ é 30.

(2) A probabilidade de que quede sen entradas é que o tempo de espera supere a media hora, polo tanto:

$$P(T > 30) = \int_{30}^{\infty} f(t) dt = \int_{30}^{\infty} \frac{1}{30} e^{-\frac{t}{30}} dt = -e^{-\frac{t}{30}} \Big|_{30}^{\infty} = e^{-\frac{30}{30}} = \frac{1}{e} = 0,3678794. \quad (10.76)$$

é dicir, temos unha probabilidade de aproximadamente o 36,7 % de que se esgoten as entradas e non ser quen de entrar no portal.

(3) Dado que transcorreron 15 minutos, a probabilidade pedida é a do suceso condicional

$$S = \{T > 15 + 15 | T > 15\}. \quad (10.77)$$

Temos que

$$\begin{aligned} P(S) &= \frac{P(T > 30 \cap T > 15)}{P(T > 15)} = \frac{P(T > 30)}{P(T > 15)} = \frac{0,3678794}{e^{-\frac{15}{30}}} \\ &= \frac{0,3678794}{0,6065307} = 0,6065307. \end{aligned} \quad (10.78)$$

Cómpre observar que

$$P(S) = P(T > 30 | T > 15) = P(T > 15). \quad (10.79)$$

Pódese probar que para calquera par de tempos positivos $t_0, t > 0$ temos que

$$P(T > t_0 + t | T > t_0) = P(T > t). \quad (10.80)$$

Dise que as variábeis que cumpren esta propiedade «carecen de memoria», dado que a probabilidade de que ocorra un evento no futuro non depende de canto tempo transcorreu dende o último evento. $\square$

Tarefa extra 10.5. No contexto desta situación de aprendizaxe, a probabilidade de que unha persoa *swiftie* sexa quen de mercar unha entrada nunha conexión á páxina de venda (nun portal non oficial) é de $p = 0,25$ debido á altísima demanda, a limitada dispoñibilidade de entradas, e a que o portal de venda de entradas dá numerosos problemas durante o proceso. Posto que a persoa quere ir coa súa parella, queremos analizar cantas veces ten que conectarse á páxina —sempre sobrecargada con altísimo tempo de espera para que cargue, para chegar a poder mercar todas as entradas—. Cada vez que tentamos mercar entradas demoramos dous minutos e por experiencias doutros concertos sabemos que en 30 minutos as entradas estarán esgotadas. Asumimos que cada vez que se tenta mercar unha entrada é un proceso independente do resto.

1. Cal é a probabilidade de obter as dúas entradas nas catro primeiras conexións?
2. Cantas veces debe conectarse como mínimo para ter unha probabilidade do 75 % de obter as 2 entradas?
3. Cal é o número esperado de conexións para obter as 2 entradas? Canto tempo investiría?

Solución. Esta tarefa está relacionada coa 10.4, se ben agora incorporamos a dedución da expresión xeral da distribución de probabilidade dunha binomial negativa.

O experimento consiste en conectarse sucesivamente ata conseguir o número de entradas desexadas (neste caso 2). Polo tanto, definamos a variábel

$$X = \text{número de intentos ata conseguir as dúas entradas.} \quad (10.81)$$

O enunciado indica que hai independencia en cada intento. Os valores que toma a variábel son $k = 2, 3, \dots$. Denotemos

$$E = \text{suceso éxito – consegue a entrada nese intento,} \quad (10.82)$$

e o complementario

$$F = \text{suceso fracaso – non consegue a entrada nese intento.} \quad (10.83)$$

Calculemos agora as probabilidades:

$$P(X = 2) = P(E E) = p^2 \quad (10.84)$$

indicando por EE o suceso, tanto no primeiro coma no segundo intento se conseguiu éxito, é dicir, temos a primeira e a segunda entrada, respectivamente. Ademais,

$$P(X = 3) = P(EFE) + P(FEE) = p(1 - p)p + (1 - p)p^2 = 2(1 - p)p^2, \quad (10.85)$$

indicando por EFE , primeiro e tercer intento éxitos e segundo fracaso e por FEE , primeiro intento fracaso e segundo e terceiro intento éxito. Se analizamos 4 tentativas:

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= P(EFFE) + P(FEFE) + P(FFEE) \\ &= p(1 - p)^2p + (1 - p)p(1 - p)p + (1 - p)^2p^2 = 3(1 - p)^2p^2. \end{aligned} \quad (10.86)$$

Para deducir a fórmula xeral, debemos decatarnos de que se se producen k intentos, ten que haber $k - 2$ fracasos e 2 éxitos, e ademais o último intento debe de ser éxito.

$$P(X = k) = n(1 - p)^{k-2}p^2, \quad (10.87)$$

onde n é o número de sucesos que teñen as restricións dadas anteriormente. Por combinatoria, temos que colocar 1 éxito en $k - 1$ posicións, de xeito que

$$n = \binom{k-1}{1} = k - 1. \quad (10.88)$$

Se denotamos por r o número de éxitos, obtemos a expresión xeral da distribución de probabilidade:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1 - p)^{k-r}, \quad k = r, r + 1, \dots, \quad (10.89)$$

onde p é a probabilidade de éxito nun intento, r é o número total de éxitos e k é o número total de intentos para ter r éxitos. Esta variábel chámase binomial negativa e mide o número de intentos para que se obteñan r éxitos, onde as tentativas son independentes e con probabilidade p de éxito.

(1) Segundo o enunciado temos que conseguir dúas entradas, polo que $r = 2$ e $p = 0,25$. Polo tanto, e dada a función masa de probabilidade anterior:

$$P(X = 4) = \binom{4-1}{2-1} 0,25^2 (1 - 0,25)^{4-2} = 3 \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^2 = 0,1054688. \quad (10.90)$$

(2) Dado que queremos obter o número máis pequeno de conexións (k), debe ser o primeiro número enteiro en verificar:

$$P(X \leq k) = P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = k) \geq 0,75. \quad (10.91)$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0,062	0,094	0,105	0,105	0,099	0,089	0,078	0,067	0,056
$P(X \leq k)$	0,062	0,156	0,262	0,367	0,466	0,555	0,633	0,700	0,756

É dicir, precisa 10 conexións como mínimo para obter unha probabilidade de polo menos o 75 % de obter as dúas entradas.

(3) Posto que a esperanza da binomial negativa é

$$E(X) = \frac{r}{p} \quad (10.92)$$

temos que

$$E(X) = \frac{2}{0,25} = 8, \quad (10.93)$$

é dicir, a/o *swiftie* necesita oito intentos para ter as dúas entradas. Posto que cada tentativa son dous minutos, empregaría 16 minutos.

□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato, para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (Influencers) que consideramos moi detallada, e nas outras, como a presente, pode reformularse *mutatis mutandis*.



Unha obra na túa rúa

Situación de aprendizaxe 11. Cada día camiñamos por rúas e avenidas. Pero estas construcións non sempre estiveron aí, pois son artificiais e alguén tivo que deseñalas. De cando en vez, hai que abrir para facer unha instalación nova, como por exemplo para o gas natural ou para a fibra de internet. Tamén é certo que cos anos os coñecementos sobre materiais van variando, do mesmo xeito que as normativas que regulan como acometer unha obra.

Desde o punto de vista histórico, temos que remontarnos ao ano 3.750 a. C. en Nippur (actual Iraq) para atopar a primeira rede cloacal coñecida. En Atenas e Corinto, no período da antiga Grecia, houbo redes cunha certa complexidade, empregando canales rectangulares cubertas con lousas que xa formaban parte do pavimento das rúas, non moi distinto ao que temos hoxe en día. O alumnado pode investigar sobre a historia e as distintas necesidades de saneamento.

Nesta situación de aprendizaxe tratamos un problema habitual: a cada vez máis frecuente necesidade de substituír as redes de saneamento feitas en fibrocemento por materiais plásticos, como pode ser PVC (policloruro de vinilo), polietileno e polipropileno, ou por materiais compostos como as resinas de poliéster reforzadas con fibra de vidro (PRFV).

Concretamente, debido a un número cada vez maior de obras derivadas dun saneamento que xera moitas obras en distintos puntos, o teu concello decide refacer completamente a rúa na que vives. Serán meses de incomodidades, coa esperanza de que ao final do proceso non só se resolvan os numerosos problemas, senón que poida mellorar a calidade de vida da veciñanza. Preténdese que o alumnado reflexione sobre a importancia do deseño nunha cidade e a investigación en novos materiais.

Estímulo 11.1: Fabricando, usando, destruindo e reciclando... , ou valorizando?

Ao camiñar polas rúas e avenidas, podemos atoparnos cuns elementos decorativos de chamativas cores, que recollen o lixo de xeito clasificado, como podes ver nesta imaxe do xornal *El Ideal Gallego*, do 6 de decembro de 2023, onde hai distintos contedores en Arteixo.



Sabes que meter en cada un deles?

Na actualidade, a maior parte dos materiais empregados na fabricación de pezas, utensilios, roupas etc., pertencen á familia dos materiais plásticos polas súas propiedades. Podedes investigar as diferentes familias de materiais e comparar as propiedades físicas, químicas e mecánicas de cada unha delas (metais, cerámicos, poliméricos –plásticos– e materiais compostos).

Pero o emprego masivo dos materiais plásticos está a xerar os grandes problemas medioambientais do noso século, facendo que o noso ecosistema se vexa modificado dun xeito perigoso. Por iso hai que ter en conta que non todos os plásticos son iguais, pois case coma os pementos de Padrón: uns recíclanse e outros non. Logo, onde está a diferenza?

Para entender por que isto é así, e as diferenzas entre eles, cómpre analizar como é a estrutura molecular dos diferentes tipos de plásticos. Hai tres grandes familias de plásticos: os chamados termoplásticos, os termoestables e o elastómeros. Os primeiros son os que se consomen en maior cantidade e presentan unha estrutura molecular formada por cadeas lineares unidas por enlaces febles de hidróxeno. Pertencen a este grupo o PVC, polietileno, polipropileno, metacrilato ou o PET, entre outros. Os chamados termoestables son os que ocupan a segunda posición en consumo, e están formados por unha estrutura molecular reticular na que se forman enlaces fortes, difíciles de romper. Algúns polímeros deste grupo son as resinas de poliéster, caucho vulcanizado, a melamina, por citar algúns. Os de menor consumo son os do terceiro grupo, os elastómeros (gomos, siliconas, látex etc.), que teñen unha estrutura molecular de tipo retículo pero moitísimo máis feble que a que presentan os termoestables.

Dos tres grupos de plásticos, a día de hoxe só se poden reciclar os do primeiro grupo. A causa principal deste feito está nos enlaces febles dos termoplásticos, que permiten que con calor as cadeas se separen e que ao arrefriar se volvan unir. Por iso hai grandes cemiterios de rodas de coches e non hai cemiterios de botellas de plástico(s).

Para tentar desfacerse dos cemiterios de rodas, estas tritúranse e con este material triturado pódese facer, por exemplo, a primeira capa do chan dunha pista deportiva. Este proceso, no que se lle intenta atopar un aproveitamento a un residuo non reciclable, chámase valorización.

Non obstante, no caso dos termoplásticos, o material usado pódese volver empregar como materia prima para volver facer a mesma peza que se tiña ao principio. Un exemplo é o PET empregado na fabricación de botellas: por exemplo o PET dunha botella de auga (depositada no contedor amarelo) pódese transformar nun «pélet de PET» que vai a unha máquina de facer botellas para obter de novo unha botella de PET reciclado. Os materiais plásticos que pertencen á familia dos termoplásticos recíclanse un número infinito de veces.



Texto de **María Consuelo Pérez Vázquez**, directora do [Departamento de Enxeñaría dos Materiais, Mecánica Aplicada e Construción](#) da [Universidade de Vigo](#)

Estímulo 11.2: Viñeta de Xosé Lois González Vázquez, “o Carrabouxo”, publicada no xornal *La Región*



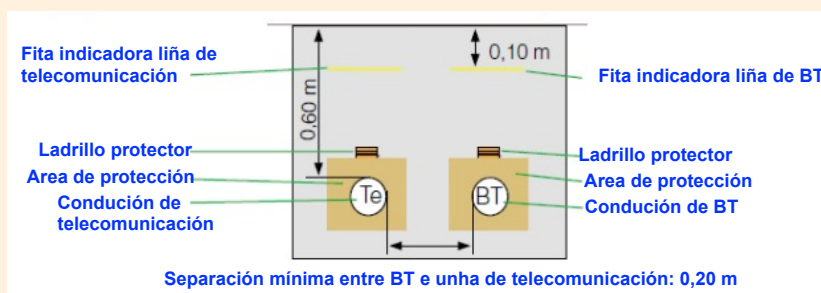
<https://carrabouxo.es/2024/08/25/carra23-8-24/>

Estímulo 11.3: Viñeta de Luís Davila Malvido, “o Bichero”, publicada no xornal *Faro de Vigo*

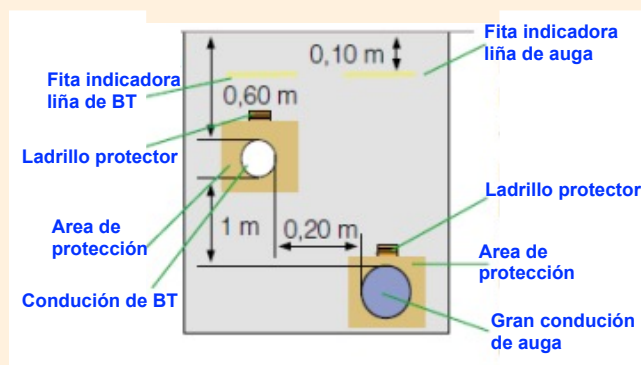


<https://www.facebook.com/137769253029662/photos/reciclaxe-galegahumorgalegohttpwwwfarodevigoeshumor/418241554982429>

Tarefa 11.1. Tempo estimado para a resolución: 40 minutos. As obras que se están a realizar na miña rúa están destinadas a soterrar a liña de baixa tensión, renovar a canalización de auga e poñer unha canalización soterrada para as liñas de telecomunicacións. Todas estas tubaxes non se poden colocar de calquera xeito, xa que teñen que respectar unhas normas de separación, distancia entre elas, distancia vertical ao chan da calzada e, por suposto, a tubaxe máis profunda debe ser a da auga. Estas regras resúmense nos seguintes gráficos obtidos de [Electrosertec](#):



No gráfico superior represéntase a localización da liña de baixa tensión (BT) e da condución dos cables de telecomunicacións (Te).



No gráfico superior represéntase a localización da liña de baixa tensión (BT) e da canalización de auga (círculo azul máis profundo).

Empregando cm como unidade de medida, se a calzada baixo a que pasan todos os tubos está situada no plano de ecuación

$$\pi : x + 2y + 3z = 0, \quad (11.1)$$

1. Comproba se a fita indicadora da liña de baixa tensión (en amarelo na figura), que segue a dirección da liña recta

$$r : x - 3 = y - 2 = -z + 9 \quad (11.2)$$

é paralela á estrada e está situada a unha distancia de exactamente 10 cm da calzada.

2. Se os condutos para os cables de telecomunicacións e para a liña de baixa tensión seguen as direccións das rectas t e b , respectivamente, comproba para que valores de m cumpren as condicións de paralelismo.

$$t : x - 3 = \frac{y - 2}{m} = -z + 9, \quad b : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha, \\ y = \alpha, \\ z = -1 + 2\alpha. \end{cases} \quad (11.3)$$

Para os valores de m obtidos, estuda se se cumpre a condición de distancia entre eles.

3. Se o plano que constitúe o chan da gabia ten ecuacións paramétricas

$$\pi' : \begin{cases} x = 3\alpha, \\ y = -3\beta, \\ z = -550 - \alpha + 2\beta \end{cases} \quad (11.4)$$

Cal é a profundidade da gabia?

4. A inspectora de obras quere saber se a gabia e as distintas tubaxes están correctamente colocadas e para iso dispón das ecuacións normais dos planos sobre os que asenta a calzada, a conducción de baixa tensión e a conducción da auga:

$$\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ \pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \quad (11.5)$$

Cales deben ser os rangos das matrices de coeficientes e da matriz ampliada do sistema formado polas tres ecuacións para facer unha certificación positiva?

Solución. (1) A recta r dada na ecuación (11.2) pode expresarse como

$$r : x - 3 = y - 2 = \frac{z - 9}{-1} \quad (11.6)$$

pode ser escrita en forma paramétrica mediante

$$r : \begin{cases} x = 3 + \alpha, \\ y = 2 + \alpha, \\ z = 9 - \alpha, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbf{R}. \quad (11.7)$$

Tentamos calcular a intersección da recta r co plano π definido na ecuación (11.1),

$$(3 + \alpha) + 2(2 + \alpha) + 3(9 - \alpha) = 0, \quad (11.8)$$

que implicaría $34 = 0$, o que significa que non hai puntos en común entre a recta r e o plano π , é dicir, son paralelos.

Calculamos entón a distancia entre a recta r e o plano π , empregando que $P(3, 2, 9)$ é un punto da recta:

$$d(P, \pi) = \frac{|3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 9|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{34}{\sqrt{14}} = 9,08 \text{ cm} = 0,09 \text{ m}. \quad (11.9)$$

Polo tanto, non garda a distancia de 10 cm, e a fita está algo menos profunda do debido.

(2) Para a recta t definida na ecuación (11.3) temos o punto $P_t(3, 2, 9)$ e o vector director $\vec{v}_t = (1, m, -1)$. Nesa mesma ecuación (11.3) temos a recta b , para a cal temos o punto $Q_b(1, 0, -1)$ e o vector director $\vec{v}_b = (-2, 1, 2)$. Analizamos en primeiro lugar se os vectores $\vec{v}_t$ e $\vec{v}_b$ son proporcionais:

$$\frac{1}{-2} = \frac{m}{1} = \frac{-1}{2} \implies 2m = -1 \implies m = \frac{-1}{2}. \quad (11.10)$$

Xa que logo, se $m = -1/2$ as dúas conducións son paralelas ou coincidentes. Temos agora que desbotar que sexan coincidentes. Para iso simplemente comprobamos que o punto P_t non está na recta b :

$$\begin{cases} 3 = 1 - 2\alpha \implies 2\alpha = -2 \implies \alpha = -1, \\ 2 = \alpha \implies \alpha = 2, \\ 9 = -1 + 2\alpha \implies 10 = 2\alpha \implies \alpha = 5. \end{cases} \quad (11.11)$$

Polo tanto, non existe un único valor de α , o que significa que as rectas son paralelas (e non coincidentes) para o valor $m = -1/2$.

Calculamos finalmente a distancia entre as dúas rectas t e b , para o cal determinamos o vector

$$\overrightarrow{Q_b P_t} = (2, 2, 10), \quad (11.12)$$

de xeito que

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 10 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6, -24, 6). \quad (11.13)$$

Xa que logo

$$d(P_t, b) = \frac{\sqrt{(-6)^2 + (-24)^2 + 6^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = 8,4 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}. \quad (11.14)$$

En consecuencia, a distancia entre as conducións é menor do valor establecido, que é de 0,20 m.

(3) Temos por unha banda o plano π dado na ecuación (11.1) e por outra o plano do chan da gabia π' dado na ecuación (11.4). Se expresamos o segundo en forma xeral,

$$\begin{vmatrix} x & y & x + 550 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -3x - 6y - 9z - 4.950 = 0, \quad (11.15)$$

ou equivalentemente

$$\pi' : -x - 2y - 3z - 1.650 = 0. \quad (11.16)$$

Posto que o vector normal de π é $\vec{n}_\pi = (1, 2, 3)$ e o vector normal de π' é $\vec{n}_{\pi'} = (-1, -2, -3)$, temos que

$$\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{3}{-3} = -1. \quad (11.17)$$

Porén,

$$\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{3}{-3} \neq \frac{0}{-1.650}, \quad (11.18)$$

de xeito que os planos son paralelos (e non coincidentes). Para calcular a distancia entre os planos π e π' podemos simplemente calcular a distancia do punto $P_\pi(0, 0, 0)$ ao plano π' :

$$d(\pi, \pi') = d(P_\pi, \pi') = \frac{|-0 - 0 - 0 - 1.650|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{1.650}{\sqrt{14}} \approx 440,98 \text{ cm} = 4,41 \text{ m}. \quad (11.19)$$

A gabia ten unha profundidade de 4,41 metros.

(4) Para facer unha certificación positiva da obra os tres planos teñen que ser paralelos. Polo tanto, o rango da matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

ten que ser un e o rango da matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix} \quad (11.21)$$

ten que ser dous.

□

Tarefa 11.2. Tempo estimado para a resolución: 40 minutos. A brigada de persoas traballadoras que está a facer as obras na rúa teñen un horario de traballo distinto cando a temperatura ás doce do mediodía sobrepasa os 30 graos centígrados. Nese caso, o horario é de 7 da mañá ata as 14 horas, no lugar do horario habitual que é de 9.00 a 14.00 horas e de 16.00 a 19.00 horas. A temperatura que fai cada día ás doce do mediodía está ligada á temperatura que fixo o día anterior e a certas observacións da natureza, como pode ser a posición de certas nubes nun monte próximo, a través da seguinte matriz de probabilidades

		Día actual		
		>30°	[20°,30°]	<20°
Día anterior	>30°	$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/10 & 2/5 & 1/2 \end{bmatrix}$		
	[20°,30°]			
	<20°			

Os días nos que a brigada fai a xornada intensiva, a probabilidade de que cumpran o plan de traballo dese día é 7/9, mentres que se non fan xornada intensiva a dita probabilidade é de 5/9.

A xefa de obra avisa a brigada cada día, ás 14 horas de cada día de traballo, se ao día seguinte de traballo farán xornada habitual ou xornada intensiva, en función da temperatura dese día ás doce do mediodía e da matriz de probabilidade anterior.

Un luns alcanzáronse 32 graos centígrados de temperatura ás doce do mediodía.

1. Se o martes cumpren o plan de traballo previsto, cal é a probabilidade de que fagan xornada intensiva ese día?

2. Dado que coa xornada intensiva se acadan os obxectivos diarios con maior probabilidade, a empresa decide implantar este horario de xeito permanente. A xefa de obra dille aos traballadores que rematarán a obra en prazo se en, polo menos, o 75 % de 40 días escollidos ao chou a brigada cumpre co plan de traballo para ese día. Cal é a probabilidade de que a obra remate no prazo estipulado?
3. O departamento administrativo da empresa desexa recoller na memoria anual o tipo de variábel que segue a duración das obras que realizan. Para isto dispón da seguinte información:
 - (a) O 2,28 % das obras que executan ten unha duración menor que 30 días;
 - (b) O 15,87 % das obras prólonganse durante 75 días ou máis.

Asumindo que a duración das obras da empresa segue unha distribución normal, cales son os parámetros media e desviación típica desa variábel?
4. A xerenta da empresa asígnalles aos traballadores máis cualificados o 18 % de obras que teñen maior duración para tratar de axilizar os traballos. Cal é a duración que ten que ter unha obra para que a xerenta lles asigne traballadores cualificados?

Solución. (1) Sexan

T = «cumprir o plan de traballo dese día»,

I = «xornada intensiva»,

$\bar{I}$ = «xornada partida».

Temos que

$$P(T|I) = \frac{7}{9}, \quad P(T|\bar{I}) = \frac{5}{9}. \quad (11.22)$$

Posto que

$$P(T) = P(T|I) \cdot P(I) + P(T|\bar{I})P(\bar{I}) = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{21}{36} + \frac{5}{36} = \frac{26}{36}, \quad (11.23)$$

temos que

$$P(I|T) = \frac{P(T|I) \cdot P(I)}{P(T)} = \frac{\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{26}{36}} = \frac{21}{26} = 0,81. \quad (11.24)$$

(2) Sexa X = «número de días dos 40 nos que a brigada cumpre o plan de traballo». Temos entón

$$X \sim \text{Bi}(40; 0,78). \quad (11.25)$$

Posto que o 75 % de 40 son 30 días, temos que

$$P(\text{rematar a obra en prazo}) = P(X \geq 30). \quad (11.26)$$

Ademais, posto que

$$n = 40 \geq 30, \quad np = 40 \cdot 0,78 = 31,2 \geq 5, \quad nq = n(1-p) = 40 \cdot 0,22 = 8,8 \geq 5, \quad (11.27)$$

podemos aproximar

$$\text{Bi}(40; 0,78) \approx \text{N}(31,2; 2,62). \quad (11.28)$$

Aplicamos a corrección de medio punto para calcular

$$\begin{aligned} P(X \geq 30) &\approx P\left(\frac{X - 31,2}{2,62} \geq \frac{29,5 - 31,2}{2,62}\right) = P(Z \geq -0,65) = 1 - P(Z \leq -0,65) \\ &= 1 - [1 - P(Z \leq 0,65)] = 0,7422. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Polo tanto, a probabilidade de rematar a obra en tempo é de 0,7422.

(3) Sexa

$$X = \text{duración da obra en días} \approx \text{N}(\mu; \sigma). \quad (11.30)$$

Para calcular μ e σ sabemos

$$P(X \leq 30) = 0,028, \quad P(X \geq 75) = 0,1587. \quad (11.31)$$

Tipificamos e formulamos o sistema

$$\begin{cases} P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{30 - \mu}{\sigma}\right) = 0,028 \\ P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{75 - \mu}{\sigma}\right) = 0,1587 \end{cases} \implies \begin{cases} P\left(Z \leq \frac{30 - \mu}{\sigma}\right) = 0,028 \\ P\left(Z \leq \frac{75 - \mu}{\sigma}\right) = 0,8413. \end{cases} \quad (11.32)$$

Polo tanto, obtemos que

$$\begin{cases} \frac{30 - \mu}{\sigma} = -2, \\ \frac{75 - \mu}{\sigma} = 1, \end{cases} \quad (11.33)$$

que ao resolver dá

$$\mu = 60 \text{ días}, \quad \sigma = 15 \text{ días}. \quad (11.34)$$

Polo tanto, a variábel duración das obras segue unha distribución $N(60; 15)$ en días.

(4) Consideremos

$$X = \text{duración da obra} \approx N(60; 15), \quad (11.35)$$

e

$$D = \text{duración buscada tal que } P(X \geq D) = 0,18. \quad (11.36)$$

Posto que

$$P\left(\frac{X - 60}{15} \geq \frac{D - 60}{15}\right) = 0,18 \quad (11.37)$$

temos que

$$P\left(Z \geq \frac{D - 60}{15}\right) = 0,18 \quad (11.38)$$

de onde

$$1 - P\left(Z < \frac{D - 60}{15}\right) = 0,18 \quad (11.39)$$

polo que

$$P\left(Z < \frac{D - 60}{15}\right) = 0,82. \quad (11.40)$$

Xa que logo

$$\frac{D - 60}{15} = 0,92, \quad (11.41)$$

de onde

$$D = 0,92 \cdot 15 + 60 = 73,8 \approx 74 \text{ días.} \quad (11.42)$$

Polo tanto, os traballadores cualificados son asignados ás obras cunha duración igual ou superior a 74 días.

□

Tarefa 11.3. Tempo estimado para a resolución: 20 minutos. A xefa dunha empresa que instala a nova acometida da rede de sumidoiros na miña rúa é afeccionada ás matemáticas e chegou á conclusión de que o número de metros que avanza cada día é directamente proporcional ao cadrado do número de obreiras e obreiros que traballan nesa tarefa e ao número de martelos perforadores que aluga para facer a gabia para a nova instalación, segundo a fórmula

$$M = 2N^2P, \quad (11.43)$$

onde M é o número de metros que avanza a gabia por día, N é o número de obreiras e obreiros que traballan na gabia por día, e P é o número de martelos perforadores traballando por día.

Posto que contratar máis obreiras e obreiros e alugar máis martelos perforadores ten un maior custo e o orzamento da obra é limitado, quere minimizar o dito custo tendo en conta que para rematar a obra no prazo teñen que avanzar 18 metros diarios de gabia. Sabendo que o custo diario de cada obreira ou obreiro é de 150 €, incluíndo as cotizacións á seguridade social, e o alugueiro de cada martelo é de 225 €, cantas obreiras e obreiros debe contratar diariamente e cantos martelos debe alugar para minimizar o custo, cumprindo o prazo establecido para a execución da obra? Cal sería o custo diario nese caso?

Solución. Para cumprir o prazo deben avanzar 18 metros diarios, de xeito que

$$18 = 2N^2P. \quad (11.44)$$

A función obxectivo para minimizar é o custo da contratación das obreiras e obreiros mais o alugueiro dos martelos

$$f(N, P) = 150N + 225P. \quad (11.45)$$

Da ecuación (11.44) temos que

$$P = \frac{9}{N^2} \quad (11.46)$$

de xeito que ao substituír na ecuación (11.45) temos xa unha función dunha única variábel

$$f(N) = 150N + 225 \frac{9}{N^2}. \quad (11.47)$$

Para determinar os posíbeis extremos, calculamos a derivada

$$f'(N) = 150 - \frac{225 \cdot 9 \cdot 2}{N^3} = 150 - \frac{4050}{N^3}. \quad (11.48)$$

Os posibles extremos relativos de f son solución de $f'(N) = 0$ ou equivalentemente

$$150N^3 - 4050 = 0, \quad (11.49)$$

de onde

$$N^3 = \frac{4050}{150} = 27, \quad (11.50)$$

polo que $N = 3$. Posto que

$$f''(N) = \frac{4050 \cdot 3}{N^4} > 0, \quad (11.51)$$

temos que en $N = 3$ a función $f(N)$ presenta un mínimo relativo.

Xa que logo, o número de martelos será

$$P = \frac{9}{N^2} = \frac{9}{9} = 1. \quad (11.52)$$

Nestas condicións, habería que contratar diariamente a 3 persoas e alugar un martelo para minimizar o custo cumprindo o prazo.

O custo diario é de

$$150 \cdot 3 + 225 \cdot 1 = 450 + 225 = 675 \text{ €}. \quad (11.53)$$

□

Tarefa 11.4. Tempo estimado para a resolución: 30 minutos. Durante unhas obras nunha rúa, precisamos instalar unha rampla temporal que lles permita aos peóns, peoas e vehículos pequenos superar un desnivel de $h = 1,5$ m nun tramo horizontal de $L = 10$ m. Para garantir a seguridade e a comodidade, a rampla debe ter unha pendente que varíe suavemente ao longo da súa lonxitude. No estímulo 11.2 podes ver a necesidade de ter medidas de seguridade, que poden causar incomodidades á cidadanía.

O deseño da rampla modelizarase usando unha curva cúbica do tipo:

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (11.54)$$

onde $y(x)$ representa a altura en función da distancia horizontal x , e a, b, c, d son constantes que determinan a forma da rampla.

1. Determina os coeficientes a, b, c, d que cumpren as seguintes condicións:
 - No inicio, a rampla comeza ao nivel do chan.
 - No final, a rampla alcanza a altura do desnivel.
 - A pendente en ambos os extremos debe ser cero para garantir transicións suaves.
2. Fai un bosquexo da gráfica.
3. Determina o volume total de material necesario para construír a rampla, considerando o seu ancho $A = 2$ m.

Solución. (1) Para garantir que a rampla comece a nivel do chan e remate na altura do desnivel temos que

$$y(0) = 0, \quad y(10) = 1,5. \quad (11.55)$$

Ao substituír estas dúas condicións en (11.54) obtemos

$$\begin{cases} 0 = y(0) = d \implies d = 0, \\ 1000a + 100b + 10c = 1,5. \end{cases} \quad (11.56)$$

Ademais, posto que a pendente nos dous extremos ten que ser cero, temos as seguintes dúas condicións adicionais:

$$y'(0) = 0, \quad y'(10) = 0. \quad (11.57)$$

Para poder impoñer estas últimas condicións na cúbica cómpre derivar,

$$y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c. \quad (11.58)$$

Deste xeito, se aplicamos as condicións (11.57) en (11.58) resulta

$$\begin{cases} 0 = y'(0) = c \implies c = 0, \\ 0 = y'(10) = 300a + 20b. \end{cases} \quad (11.59)$$

Se combinamos, entón resulta o seguinte sistema

$$\begin{cases} d = c = 0, \\ 1000a + 100b + 10c = 1,5, \\ 300a + 20b = 0. \end{cases} \quad (11.60)$$

Da última ecuación resulta

$$b = -15a, \quad (11.61)$$

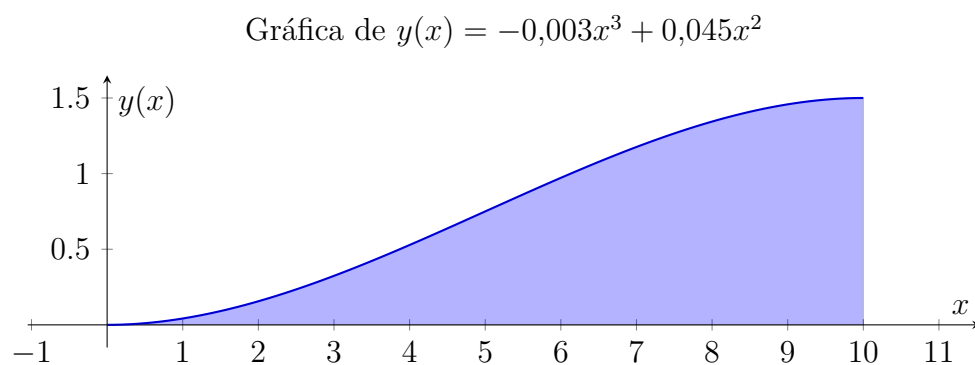
que ao substituír implica

$$1000a + 100 \cdot (-15a) = 1,5 \implies -500a = 1,5 \implies a = -0,003, \quad b = 0,045. \quad (11.62)$$

Xa que logo, a ecuación da rampla é

$$y(x) = -0,003x^3 + 0,045x^2. \quad (11.63)$$

(2) De seguido móstrase a gráfica da rampla, onde se observa a curva e a área baixo a dita curva:



(3) O volume total de material necesario calcúlase mediante

$$V = S \cdot A. \quad (11.64)$$

onde S é a área baixo a curva $y(x)$ no intervalo $[0, 10]$. Calcúlase mediante a integral definida:

$$S = \int_0^{10} y(x) dx. \quad (11.65)$$

Posto que $y(x)$ está dada en (11.63) resulta

$$S = \int_0^{10} (-0,003x^3 + 0,045x^2) dx. \quad (11.66)$$

Resolvemos a integral empregando as primitivas de polinomios, así como a regra de Barrow:

$$S = \left[-\frac{0,003}{4}x^4 + \frac{0,045}{3}x^3 \right]_0^{10}. \quad (11.67)$$

Se agora substituímos os límites

$$\begin{aligned} S &= \left(-\frac{0,003}{4}(10)^4 + \frac{0,045}{3}(10)^3 \right) - \left(-\frac{0,003}{4}(0)^4 + \frac{0,045}{3}(0)^3 \right) \\ &= (-7,5 + 15) = 7,5 \text{ m}^2. \end{aligned} \quad (11.68)$$

Substituíndo $S = 7,5 \text{ m}^2$ e $W = 2 \text{ m}$ na ecuación (11.64) resulta

$$V = 7,5 \cdot 2 = 15 \text{ m}^3.$$

A área baixo a curva é $S = 7,5 \text{ m}^2$, e o volume total de material necesario para construír a rampla é $V = 15 \text{ m}^3$. Este deseño garante unha transición suave e cumpre coas condicións de seguridade e comodidade.

□

Tarefa 11.5. Tempo estimado para a resolución: 40'. A empresa que fai as obras na miña rúa ten tres cuadrillas, nomeadamente C_1 , C_2 e C_3 , de persoas que traballan na obra. En cada unha delas podemos atopar persoas aprendices (A), oficiais (O) e mestras/es (M). Na primeira cuadrilla hai 3 aprendices, 5 oficiais e 1 mestra. A segunda cuadrilla está formada por 5 aprendices, 3 oficiais e 3 mestres. Na cuadrilla C_3 traballan 2 aprendices, 1 oficial e 1 mestra.

O soldo bruto de cada mestra/e é de 2.800 €, o de cada oficial é de 2.500 €, e o de cada aprendiz é de 1.600 €.



1. Formula matricialmente a información anterior.
2. Formula unha operación matricial para calcular o diñeiro que destina mensualmente a empresa ao pagamento dos soldos de cada cuadrilla.
3. Opera matricialmente para obter o diñeiro empregado en pagar os soldos mensuais de todo o persoal traballador de cada unha das categorías.
4. A cantidade que lle paga a empresa como paga extra a cada persoa traballadora é directamente proporcional ao soldo da persoa. Cada unha das persoas empregadas ten dúas pagas extras anuais. A matriz

$$T = \begin{pmatrix} 217.600 \\ 306.000 \\ 190.400 \end{pmatrix} \quad (11.69)$$

corresponde ao diñeiro que destina anualmente a empresa a pagar cada unha das categorías, incluíndo as dúas pagas extras de cada persoa traballadora. Formula unha ecuación matricial que permita calcular o diñeiro que destina a empresa a pagar as pagas extras de todas as persoas traballadoras de cada unha das tres categorías: aprendices, oficiais e mestras/es.

5. Cal é o factor de proporcionalidade entre a paga mensual de cada persoa empregada da empresa e a súa paga extra?

Solución. **(1)** Definimos as matrices columna co número de persoas traballadoras das categorías A , O e M en cada unha das tres cuadrillas

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.70)$$

Definimos agora a matriz P de tamaño 3×3 coa información anterior

$$P = \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.71)$$

Definimos a matrix S de tamaño 3×1 de soldos

$$S = \begin{pmatrix} 1.600 \\ 2.500 \\ 2.800 \end{pmatrix}, \quad (11.72)$$

e a matriz S' de tamaño 3×3 , tamén de soldos

$$S' = \begin{pmatrix} 1.600 & 0 & 0 \\ 0 & 2.500 & 0 \\ 0 & 0 & 2.800 \end{pmatrix}, \quad (11.73)$$

Finalmente definimos a matriz de tamaño 3×1 mediante

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.74)$$

(2) Posto que

$$P \cdot S = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.600 \\ 2.500 \\ 2.800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.100 \\ 23.900 \\ 8.500 \end{pmatrix} \quad (11.75)$$

temos que a empresa destina mensualmente 20.100 € a pagar a cuadrilla C_1 , 23.900 € a pagar a cuadrilla C_2 e 8.500 € a pagar a cuadrilla C_3 .

(3) Neste caso temos que

$$P^T \cdot U \cdot S' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.600 & 0 & 0 \\ 0 & 2.500 & 0 \\ 0 & 0 & 2.800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.000 \\ 22.500 \\ 14.000 \end{pmatrix}. \quad (11.76)$$

Xa que logo, a empresa dedica 16.000 € mensuais a pagar aprendices, 22.500 € mensuais a pagar oficiais, e 14.000 € mensuais a pagar mestras/es.

(4) Temos que resolver a ecuación matricial

$$12P^T \cdot U \cdot S' + X = T. \quad (11.77)$$

Posto que

$$X = T - 12P^T \cdot U \cdot S', \quad (11.78)$$

empregando (11.76) resulta

$$X = \begin{pmatrix} 217.600 \\ 306.000 \\ 190.400 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 16.000 \\ 22.500 \\ 14.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.600 \\ 36.000 \\ 22.400 \end{pmatrix} \quad (11.79)$$

que nos dá o diñeiro dedicado pola empresa a pagar as dúas pagas extra por categoría.

(5) Primeiro calculamos o diñeiro que dedica a empresa, por categoría, a cada paga extra

$$\frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 12.800 \\ 18.000 \\ 11.200 \end{pmatrix}. \quad (11.80)$$

A empresa ten en total 10 aprendices, de xeito que

$$\frac{12.800}{10} = 1.280 \text{ €}, \quad (11.81)$$

que é a paga extra de cada aprendiz. Posto que o soldo é de 1.600 euros, determinamos o valor de m para que

$$1.600 \cdot m = 1.280, \quad (11.82)$$

que resulta

$$m = \frac{1.280}{1.600} = 0,80. \quad (11.83)$$

Para as nove persoas con contrato de oficial, temos en primeiro lugar

$$\frac{18.000}{9} = 2.000 \text{ €} \quad (11.84)$$

que é a paga extra de cada oficial. Novamente, determinamos m da ecuación

$$2.500 \cdot m = 2.000, \quad (11.85)$$

de onde resulta novamente $m = 0,80$. Finalmente, para as mestras/es, mestres, posto que hai 5 persoas con esa categoría, temos

$$\frac{11.200}{5} = 2.240 \text{ €}, \quad (11.86)$$

que é a paga extra de cada mestra/e. O factor de proporción é

$$2.800 \cdot m = 2.240 \quad (11.87)$$

de onde outra vez $m = 0,80$.

Podemos concluír entón que a paga extra de cada persoa empregada é o 80 % do seu soldo mensual.

□

Tarefa extra 11.1. Despois de resolver as tarefas, e tendo en conta os estímulos, constrúe un texto sobre a necesidade de reciclar e as novas medidas relacionadas cos envases en dúas partes: primeira, o argumento que sostén a túa opinión, e segunda, a exposición da túa proposta.

Tarefa extra 11.2. Segundo a Asociación Española de Abastecementos de Auga e Saneamento, unha gran porcentaxe das redes de abastecemento levan en operación máis de 40 anos, o que aumenta a probabilidade de que se produzan fugas de auga nas tubaxes e, polo tanto, aparezan as «obras». A distribución das tubaxes de abastecemento de auga faise en tres grupos de idade: menor de 20 anos, entre 20 e 40 e máis de 40 anos. Sábese que o 15 % das fugas son en tubaxes cunha idade de máis de 40 anos e que o 75 % das fugas en tubaxes cunha idade superior a 40 anos son nas cidades. Ademais, o 10 % das tubaxes entre 20 e 40 anos presentan fugas e son nas cidades e o 1 % das tubaxes menores de 20 anos presentan fugas e tamén son nas cidades. Se se detecta unha fuga fóra da cidade, cal é a probabilidade de que sexa nunha tubaxe que non teña máis de 40 anos?

Solución. Sexan os sucesos $I_{<20}$, $I_{[20,40]}$, $I_{>40}$, que representan as idades das tubaxes e o suceso C que denotan unha fuga na cidade. As probabilidades do enunciado son:

$$P(I_{>40}) = 0,15, \quad P(C|I_{>40}) = 0,75, \quad P(I_{[20,40]} \cap C) = 0,10, \quad P(I_{<20} \cap C) = 0,01. \quad (11.88)$$

Podemos expresar a probabilidade pedida mediante

$$P(I_{>40}^c|C^c) = 1 - P(I_{>40}|C^c) = 1 - \frac{P(I_{>40} \cap C^c)}{P(C^c)}. \quad (11.89)$$

Agora

$$P(I_{>40}) = P(I_{>40} \cap C) + P(I_{>40} \cap C^c), \quad (11.90)$$

e daquela

$$P(I_{>40} \cap C^c) = 0,15 - 0,75 \cdot 0,15 = 0,15 - 0,1125 = 0,0375, \quad (11.91)$$

dado que

$$P(I_{>40} \cap C) = P(C|I_{>40}) P(I_{>40}) = 0,75 \cdot 0,15 = 0,1125. \quad (11.92)$$

O denominador da probabilidade pedida, obtense de:

$$\begin{aligned} P(C^c) &= 1 - P(C) = 1 - P(I_{<20} \cap C) - P(I_{[20,40]} \cap C) - P(I_{>40} \cap C) \\ &= 1 - 0,01 - 0,10 - 0,1125 = 0,7775. \end{aligned} \quad (11.93)$$

Finalmente, a probabilidade pedida é:

$$P(I_{>40}^c|C^c) = 1 - \frac{0,0375}{0,7775} = 1 - 0,0482 = 0,9517. \quad (11.94)$$

□

Tarefa extra 11.3. Queremos deseñar un sistema de canalizacións subterráneas para instalar tres tipos de infraestruturas, nomeadamente: **cable eléctrico de baixa tensión, cable de telecomunicacións e tubaxe de gas** nunha rúa, cumprindo coa [normativa ITC-BT-21](#) e, daquela, deben respectar as seguintes condicións:

i. **Distancia mínima entre canalizacións:**

- O cable eléctrico debe estar a unha distancia mínima de 1,5 metros do cable de telecomunicacións.
- A tubaxe de gas debe estar a unha distancia mínima de 2 metros das demais canalizacións para garantir a seguridade.

ii. **Profundidade de enterramento:** Cada infraestrutura ten unha profundidade mínima requirida:

- Cable eléctrico: 0,8 metros.
- Cable de telecomunicacións: 1 metro.
- Tubaxe de gas: 1,5 metros.

iii. **Lonxitude total de canalizacións:**

- A lonxitude total de canalizacións no proxecto debe ser exactamente 120 metros.

iv. **Relación entre os tipos de canalizacións:**

- A lonxitude do cable eléctrico debe ser igual á suma das lonxitudes do cable de telecomunicacións e a tubaxe de gas.
1. Expón un sistema de ecuacións que permita determinar as lonxitudes dos cables e a tubaxe, clasifícao e resólveo.
 2. Por normativa, a lonxitude asignada ao cable de telecomunicacións debe ser polo menos o dobre da lonxitude asignada á tubaxe de gas. Acha o intervalo de valores que pode tomar a lonxitude da tubaxe de gas. Cales serán as lonxitudes dos cables para o máximo valor que pode tomar a tubaxe de gas suxeita á normativa mencionada?
 3. Se a suma ponderada das profundidades das canalizacións debe ser 117,5 metros, cinguíndose ás condicións mínimas da normativa, expón un sistema de ecuacións que permita determinar as lonxitudes dos cables e a tubaxe, clasifícao e resólveo. Cumpren as lonxitudes obtidas con todas as condicións mencionadas da normativa?

Solución. (1) Segundo o sinalado no enunciado, podemos formular o seguinte sistema de ecuacións lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 120, \\ x - y - z = 0, \end{cases} \quad (11.95)$$

onde:

- x : lonxitude do cable eléctrico (en metros)
- y : longitude do cable de telecomunicacións (en metros)
- z : longitude da tubaxe de gas (en metros)

O sistema é compatíbel indeterminado, pois as dúas ecuacións son linearmente independentes e temos tres incógnitas. Da ecuación $x = y + z$, substituímos en $x + y + z = 120$:

$$(y + z) + y + z = 120 \implies 2y + 2z = 120 \implies y + z = 60. \quad (11.96)$$

Xa que logo, $x = 60$, $y = 60 - t$, $z = t$, con $t \in \mathbf{R}$.

(2) Temos entón

$$y = 60 - z \quad \text{e} \quad y \geq 2z. \quad (11.97)$$

Substituíndo:

$$60 - z \geq 2z \implies 60 \geq 3z \implies z \leq 20. \quad (11.98)$$

Xa que logo, $z \in [0, 20]$.

As lonxitudes dos cables para o máximo valor que pode tomar a tubaxe de gas suxeita á normativa son $x = 60$ m, $y = 60 - 20 = 40$ m, $z = 20$ m.

(3) O sistema é agora

$$\begin{cases} x + y + z = 120, \\ x - y - z = 0, \\ 0,8x + y + 1,5z = 117,5. \end{cases} \quad (11.99)$$

Que é equivalente a

$$\begin{cases} x = 60, \\ y + z = 60, \\ y + 1,5z = 69,5. \end{cases} \quad (11.100)$$

En consecuencia, o sistema é compatíbel determinado.

As lonxitudes dos cables son, con estas condicións, $x = 60$ m (cable eléctrico), $y = 41$ m (cable de telecomunicacións), $z = 19$ m (tubaxe de gas).

Si cumpren con todas as condicións mencionadas da normativa, pois

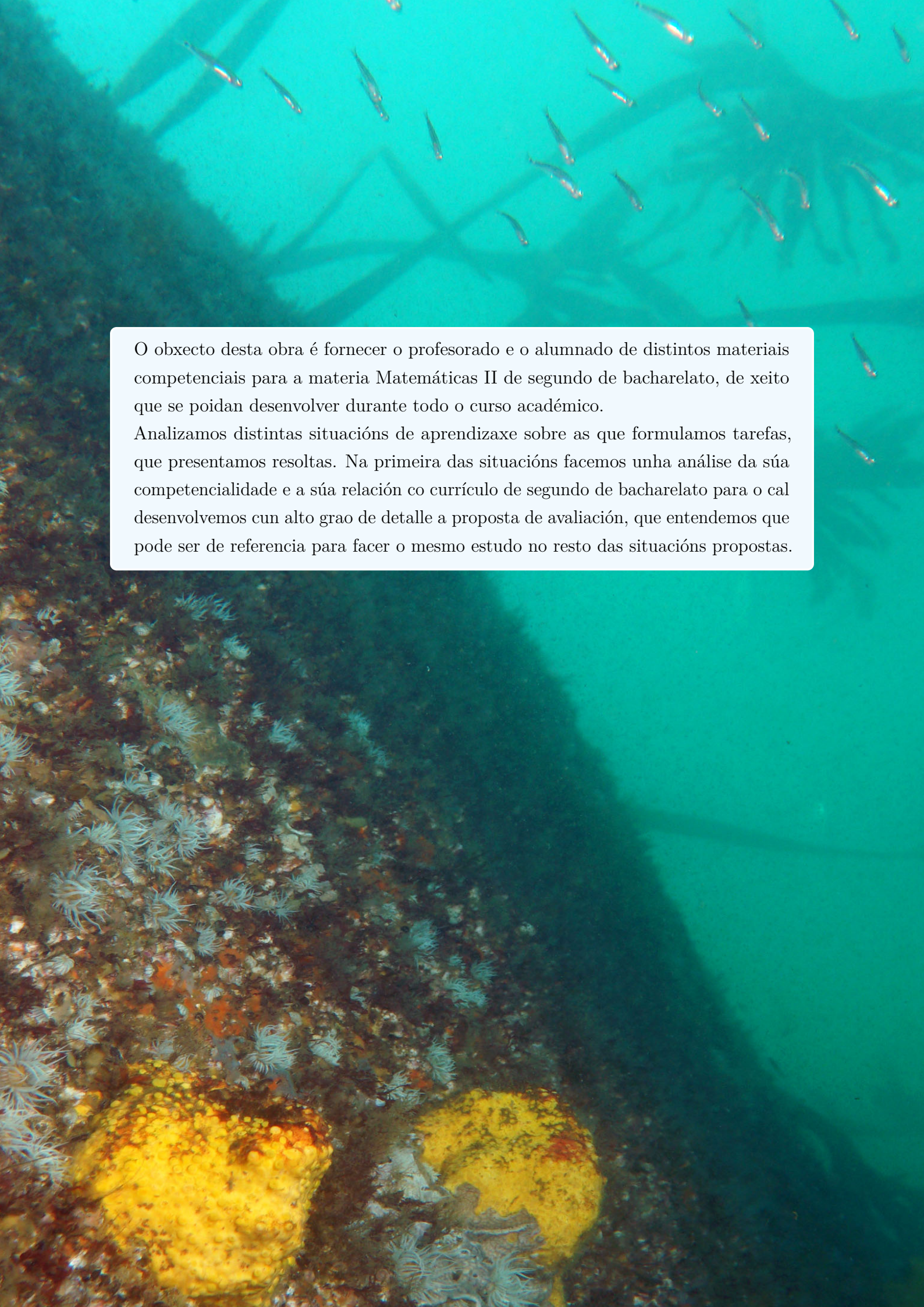
$$41 \geq 2 \cdot 19 = 38. \quad (11.101)$$

□

Análise do decálogo de dimensións de competencialidade e avaliación das competencias

Tal e como sinalamos no proemio, o cambio no modelo vai moito máis alá de contextualizar os enunciados, pois ademais de situar as cuestións en contornas próximas ao alumnado o importante é avaliar criterios e competencias, non os contidos.

Ademais de presentar varias situacións de aprendizaxe, a nosa idea é analizar a súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a avaliación da primeira das situacións de aprendizaxe, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas. Só fixemos esta análise para a primeira das situacións de aprendizaxe (Influencers) que consideramos moi detallada, e nas outras, como esta, pode reformularse *mutatis mutandis*.

An underwater photograph showing a school of small, silvery fish swimming in clear, turquoise water. In the foreground, there is a rocky seabed covered with various marine life, including white anemones and bright yellow sponges. The background shows the dark, shadowed structure of a ship's hull and propellers.

O obxecto desta obra é fornecer o profesorado e o alumnado de distintos materiais competenciais para a materia Matemáticas II de segundo de bacharelato, de xeito que se poidan desenvolver durante todo o curso académico.

Analizamos distintas situacións de aprendizaxe sobre as que formulamos tarefas, que presentamos resoltas. Na primeira das situacións facemos unha análise da súa competencialidade e a súa relación co currículo de segundo de bacharelato para o cal desenvolvemos cun alto grao de detalle a proposta de avaliación, que entendemos que pode ser de referencia para facer o mesmo estudo no resto das situacións propostas.